

Chapitre 13 – Cours

Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Reconnaître un schéma de Bernoulli
- Calculer probabilités, espérance et variance binomiales

Comprendre les notions

D'une épreuve à un schéma

Définition – Notion de départ

Une épreuve de Bernoulli possède deux issues, succès et échec, de probabilités p et $1-p$. La variable associée prend les valeurs un et zéro ; son espérance est p et sa variance $p(1-p)$. Répéter n fois des épreuves identiques et mutuellement indépendantes constitue un schéma de Bernoulli. Le nombre X de succès suit une loi binomiale, notée $\mathcal{B}(n; p)$.

Expression et indicateurs

Propriété – Lecture et conséquences

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Le coefficient compte les positions des succès ; chaque liste possède la probabilité indiquée par le produit. L'espérance est np , la variance $np(1-p)$, l'écart-type sa racine carrée. Les valeurs possibles de X sont entières, même si son espérance ne l'est pas.

Méthodes de calcul

Propriété – Lecture et conséquences

Pour « au plus k », sommer les probabilités des valeurs de zéro à k. Pour « au moins un », utiliser le contraire : $P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$. Les mots strictement supérieur et supérieur ou égal diffèrent d'une unité sur une variable entière. Une calculatrice ou Python peuvent calculer des sommes, mais la loi et les paramètres doivent être justifiés avant leur emploi.

Première lecture : application

Propriété – Lecture et conséquences

Pour quatre lancers indépendants d'une pièce équilibrée, X compte les Pile. On a $P(X = 2) = 6/16 = 3/8$, $E(X) = 2$, $V(X) = 1$. Sans indépendance ou si la probabilité change entre les essais, on ne peut pas affirmer cette loi sur la seule présence de deux issues.

Seuil et événement contraire

Définition – Seuil et événement contraire

Une probabilité cumulée rassemble plusieurs valeurs possibles de X. L'événement $X \leq k$ réunit les valeurs entières de zéro à k ; les événements sont disjoints, donc leurs probabilités s'additionnent.

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1).$$

Le décalage d'une unité vient du caractère entier de X. Une probabilité de queue est souvent plus facile à calculer par le contraire, notamment lorsque seul zéro succès doit être exclu.

Deux exemples résolus

Exemple résolu – Exactement deux succès

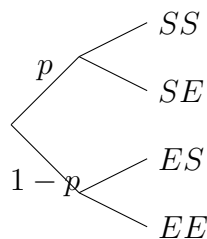
1. Un questionnaire comporte cinq réponses indépendantes, chacune juste avec probabilité 0,2. X compte les réponses justes : $X \sim \mathcal{B}(5; 0,2)$.
2. Il existe $\binom{5}{2} = 10$ positions possibles pour deux bonnes réponses. Chaque liste correspondante a une probabilité $0,2^2 \times 0,8^3$.

3. Ainsi $P(X = 2) = 10 \times 0,04 \times 0,512 = 0,2048$. L'espérance vaut un ; elle n'interdit pas d'observer deux succès.

Exemple résolu – Au moins une réussite

1. Chaque essai indépendant réussit avec probabilité un demi. Pour n essais, la probabilité de zéro succès est 2^{-n} .
2. Obtenir au moins un succès avec probabilité au moins 0,95 revient à demander $1 - 2^{-n} \geq 0,95$, donc $2^n \geq 20$.
3. Comme $2^4 = 16 < 20$ et $2^5 = 32 \geq 20$, le plus petit nombre d'essais est cinq. La vérification de deux entiers voisins garantit la minimalité.

Une représentation pour comprendre



Deux épreuves indépendantes : les deux chemins centraux donnent un succès.

L'arbre donne les quatre issues de deux épreuves. Les chemins succès-échec et échec-succès ont la même probabilité et conduisent tous deux à un seul succès. Leur addition explique le coefficient binomial égal à deux pour cette valeur. Un prélèvement sans remise dans une petite population ne correspond généralement pas à des essais indépendants : après un succès, la proportion disponible change. La loi binomiale ne se déduit donc pas de la seule répétition.

Il faut que le modèle assure à la fois un nombre fixé d'épreuves, une probabilité commune et l'indépendance mutuelle.

À retenir – Mini-bilan

Justifier le schéma de Bernoulli avant de calculer. Le coefficient binomial compte les positions des succès. Espérance et variance décrivent la loi ; les probabilités cumulées répondent aux questions de seuil.