

Chapitre 14 – Cours

Sommes de variables et moyennes d'échantillons

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Utiliser la linéarité de l'espérance
- Contrôler les hypothèses d'addition des variances

Comprendre les notions

Somme et changement d'échelle

Définition – Notion de départ

Pour des variables aléatoires finies, l'espérance est linéaire : $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$. Cette propriété ne demande pas l'indépendance. En revanche $V(aX + b) = a^2V(X)$ et l'addition des variances d'une somme exige des conditions : pour X et Y indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. Le signe moins devant une variable ne change pas le signe de sa contribution à la variance, car le coefficient est élevé au carré.

Échantillon et moyenne

Propriété – Lecture et conséquences

Un échantillon de taille n est modélisé par n variables indépendantes de même loi, d'espérance m et de variance σ^2 . La somme S_n a pour espérance nm et pour variance $n\sigma^2$. Sa moyenne $M_n = S_n/n$ vérifie $E(M_n) = m$ et $V(M_n) = \sigma^2/n$. L'écart-type de la moyenne est donc $\sigma/\sqrt{n}$. Multiplier la taille de l'échantillon par quatre divise cet écart-type par deux, pas par quatre.

Première lecture : application et précaution

Propriété – Lecture et conséquences

Pour n dés équilibrés indépendants, chaque résultat a pour espérance $7/2$ et variance $35/12$. La somme a une espérance $7n/2$; la moyenne reste centrée en $7/2$, avec une variance $35/(12n)$. Ces résultats décrivent les lois et non une moyenne observée obligatoirement égale à leur espérance. Si $Y=X$, les variables sont dépendantes : $V(X + Y) = V(2X) = 4V(X)$, différent de $2V(X)$ dès que la variance n'est pas nulle.

Propriété – Lecture et conséquences

Cette vérification montre pourquoi il faut toujours identifier les hypothèses avant de choisir une formule.

Écart-type et précision

Définition – Écart-type et précision

L'écart-type est la racine carrée de la variance et possède la même unité que la variable. La moyenne d'un échantillon conserve l'espérance commune, tandis que sa dispersion diminue lorsque la taille augmente.

$$\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Cette réduction repose sur l'indépendance des observations. Répéter plusieurs fois une même mesure déjà réalisée, sans nouvelle observation, ne fournit pas un échantillon indépendant et ne réduit pas son incertitude de cette manière.

Deux exemples résolus

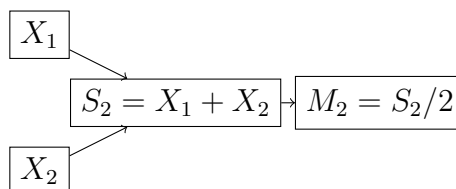
Exemple résolu – Additionner deux gains

1. Deux gains indépendants X et Y vérifient $E(X) = 2$, $E(Y) = 3$, $V(X) = 4$ et $V(Y) = 9$. Pour $G = 2X - Y + 5$, la linéarité donne $E(G) = 4 - 3 + 5 = 6$.
 2. L'indépendance permet $V(G) = 2^2V(X) + (-1)^2V(Y) = 16 + 9 = 25$.
 3. L'écart-type vaut donc cinq. La constante cinq décale le gain moyen sans changer sa dispersion ; le signe moins devant Y ne soustrait pas sa variance.
-

Exemple résolu – Moyenne de mesures indépendantes

1. Chaque mesure a une espérance de dix et un écart-type de deux. Pour vingt-cinq mesures indépendantes de même loi, la moyenne possède encore une espérance de dix.
 2. Sa variance vaut $4/25 = 0,16$ et son écart-type 0,4. Avec cent mesures, cet écart-type devient 0,2.
 3. Multiplier la taille par quatre a donc divisé l'écart-type par deux. Une moyenne observée peut cependant différer de dix ; l'espérance n'est pas une égalité imposée à chaque expérience.
-

Une représentation pour comprendre



L'addition puis la division par deux transforment les indicateurs de dispersion.

Le schéma montre deux variables indépendantes qui contribuent à une somme, puis le changement d'échelle permettant de passer à la moyenne. Les espérances s'additionnent sans hypothèse d'indépendance ; les variances s'additionnent ici grâce à cette hypothèse. La division finale agit au carré sur la variance. Pour des variables de Bernoulli, la somme est le nombre de succès et la moyenne est la fréquence. On retrouve ainsi $E(F_n) = p$ et $V(F_n) = p(1 - p)/n$.

Le passage d'une quantité entière à une proportion explique pourquoi la somme devient plus dispersée en valeur absolue alors que la fréquence se concentre.

À retenir – Mini-bilan

Espérance : linéarité sans indépendance. Variance : coefficients au carré et hypothèses d'indépendance pour les sommes. Moyenne : espérance inchangée, variance divisée par n et écart-type divisé par sa racine.
