

Chapitre 02 – Cours

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Calculer des coordonnées dans l'espace
- Étudier alignement, coplanarité et indépendance

Comprendre les notions

Passer du dessin au calcul

Définition – Notion de départ

Un vecteur de l'espace possède trois coordonnées dans une base. Dans un repère, $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$. L'addition et la multiplication par un réel s'effectuent coordonnée par coordonnée. Le milieu de $[AB]$ est obtenu en faisant la moyenne des trois coordonnées. Dans un repère orthonormé, la norme de $(x; y; z)$ vaut $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Directions et combinaisons

Propriété – Lecture et conséquences

Une droite passant par A de direction non nulle u est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = tu$, où t est réel. Un plan passant par A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires u, v rassemble les points vérifiant $\overrightarrow{AM} = su + tv$. Trois points sont alignés si les vecteurs issus d'un même sommet sont colinéaires. Pour vérifier une coplanarité, on recherche une combinaison linéaire de deux directions non colinéaires.

Propriété – Lecture et conséquences

Trois vecteurs sont indépendants si la seule combinaison nulle est celle dont tous les coefficients sont nuls. Ils forment alors une base de l'espace. Ne pas confondre non-colinéarité de deux vecteurs et indépendance de trois vecteurs.

Première lecture : situation du chapitre

Propriété – Lecture et conséquences

Pour $u = (1; 0; 1)$ et $v = (0; 1; 1)$, une combinaison est $(s; t; s + t)$. Le vecteur $(2; 3; 5)$ appartient donc au plan vectoriel engendré, contrairement à $(2; 3; 6)$. Les deux premières coordonnées imposent $s = 2, t = 3$, ce qui permet de contrôler la troisième sans approximation.

Combinaison linéaire et base

Définition – Combinaison linéaire et base

Une combinaison linéaire de deux vecteurs u, v est un vecteur $su + tv$, où s, t sont réels. Si les deux vecteurs sont non colinéaires, leurs combinaisons décrivent un plan vectoriel. Trois vecteurs forment une base de l'espace lorsqu'ils sont non coplanaires ; chaque vecteur admet alors une écriture unique dans cette base.

$$w = su + tv + rw_0.$$

Pour établir une indépendance, on peut résoudre l'équation de combinaison nulle. Si tous les coefficients sont nécessairement nuls, les vecteurs sont indépendants.

Deux exemples résolus

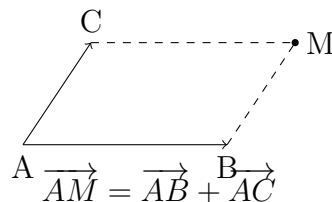
Exemple résolu – Tester un alignement

1. On considère $A(1; 0; 2)$, $B(3; 1; 1)$ et $C(7; 3; -1)$. On calcule $\overrightarrow{AB} = (2; 1; -1)$ et $\overrightarrow{AC} = (6; 3; -3)$.
 2. La même constante trois multiplie chaque coordonnée : $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$. Les points sont alignés.
 3. Le coefficient étant supérieur à un, C appartient à la droite (AB), mais pas au segment $[AB]$. L'alignement ne suffit pas à conclure l'appartenance au segment.
-

Exemple résolu – Reconnaître une base

1. Posons $u = (1; 0; 1)$, $v = (0; 1; 1)$ et $w = (0; 0; 1)$. L'égalité $au + bv + cw = 0$ donne $(a; b; a + b + c) = (0; 0; 0)$.
2. Les deux premières coordonnées imposent $a = b = 0$, puis la troisième impose $c = 0$. Les trois vecteurs forment une base.
3. Pour écrire $(2; 3; 8)$ dans cette base, on prend $a = 2$, $b = 3$ puis $c = 3$. On vérifie $2u + 3v + 3w = (2; 3; 8)$.

Une représentation pour comprendre



Le parallélogramme traduit une somme de vecteurs.

Le dessin donne une vue en perspective de deux directions issues d'un point A. Le point M est obtenu par deux déplacements successifs : la relation de Chasles traduit exactement cette construction. La perspective ne conserve pas les angles ; aucune orthogonalité ne peut donc être déduite de ce croquis. Une direction de droite est donnée par un vecteur non nul, mais ce vecteur n'est pas unique : le multiplier par un réel non nul conserve la direction.

Dans un plan, il faut deux directions non colinéaires ; deux vecteurs parallèles ne permettent pas d'atteindre tous ses points.

À retenir – Mini-bilan

Les coordonnées traduisent les déplacements. Une droite utilise une direction, un plan deux directions non colinéaires, l'espace une base de trois vecteurs non coplanaires. Toute égalité vectorielle se contrôle sur les trois coordonnées.