

Chapitre 03 – Cours

Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Utiliser le produit scalaire dans un repère orthonormé
- Déterminer projections et distances

Comprendre les notions

Définition et expression

Définition – Notion de départ

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta$. Il est symétrique et bilinéaire. Dans un repère orthonormé, $(x; y; z) \cdot (x'; y'; z') = xx' + yy' + zz'$. Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même donne le carré de sa norme. Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Droites et plans

Propriété – Lecture et conséquences

Un vecteur normal non nul à un plan est orthogonal à deux directions non colinéaires de ce plan. Une droite est orthogonale à un plan si son vecteur directeur est normal au plan. Deux droites de l'espace peuvent avoir des directions orthogonales sans se couper ; le mot « perpendiculaires » exige une intersection. Le projeté orthogonal H d'un point A sur un plan est le point du plan tel que $\overrightarrow{AH}$ soit normal au plan.

Propriété – Lecture et conséquences

La distance du point au plan est la longueur AH, plus courte distance entre A et les points du plan.

Première lecture : Méthode et application

Propriété – Lecture et conséquences

Pour projeter $A(1; 0; 0)$ sur $x + y + z = 4$, on cherche H sur la droite $A + t(1; 1; 1)$. L'appartenance au plan impose $1 + 3t = 4$, donc $t = 1$, et $H(2; 1; 1)$. La distance est $\sqrt{3}$. Cette méthode justifie la projection sans invoquer une formule de distance non démontrée. Toujours vérifier à la fois l'appartenance au plan et l'orthogonalité du déplacement obtenu.

Norme et projection

Définition – Norme et projection

La norme d'un vecteur mesure sa longueur. Dans un repère orthonormé, le carré de la norme est la somme des carrés des coordonnées. Le projeté orthogonal H d'un point A sur une droite d est l'unique point de d pour lequel le déplacement AH est orthogonal à sa direction.

$$\|u\|^2 = u \cdot u, \quad \overrightarrow{AH} \cdot v = 0.$$

Si B appartient à d , le triangle AHB est rectangle en H : $AB^2 = AH^2 + HB^2$. La distance AH est donc minimale.

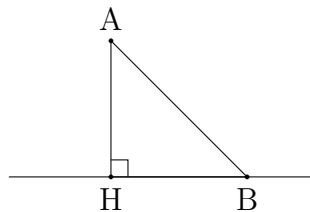
Deux exemples résolus

Exemple résolu – Calculer un angle droit

1. Prenons $u = (1; 2; -1)$ et $v = (2; 0; 2)$. Dans un repère orthonormé, $u \cdot v = 1 \times 2 + 2 \times 0 + (-1) \times 2 = 0$.
 2. Les vecteurs sont non nuls et orthogonaux. Leurs normes sont $\sqrt{6}$ et $\sqrt{8}$; la formule avec le cosinus donne $\cos \theta = 0$.
 3. Si ces directions sont celles de deux droites, on obtient des directions orthogonales. On doit encore vérifier une intersection pour affirmer que les droites sont perpendiculaires.
-

Exemple résolu – Projeter sur une droite

1. Pour projeter $A(2; 3; 1)$ sur l'axe des abscisses, écrivons $H(t; 0; 0)$. La direction de cet axe est $v = (1; 0; 0)$.
 2. La condition $\overrightarrow{AH} \cdot v = 0$ devient $(t - 2; -3; -1) \cdot (1; 0; 0) = t - 2 = 0$. Ainsi $H(2; 0; 0)$.
 3. La distance vaut $AH = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$. Tout autre point de l'axe ajoute le carré positif $(t - 2)^2$.
-

Une représentation pour comprendre

Coupe plane : AH est la distance au plan représenté par sa trace HB.

Le schéma est une coupe contenant A, son projeté H et un point B du plan. Le petit carré marque l'angle droit effectivement démontré. La projection s'effectue suivant la normale ; elle ne consiste pas à recopier arbitrairement une coordonnée, sauf dans les plans particuliers du repère. Pour prouver qu'un vecteur est normal à un plan, deux produits scalaires nuls suffisent si les deux vecteurs testés sont non colinéaires et dirigent ce plan.

Une seule orthogonalité laisserait plusieurs plans possibles. Le caractère orthonormé du repère est indispensable à la formule coordonnée utilisée ici.

À retenir – Mini-bilan

Un produit scalaire nul caractérise l'orthogonalité. Pour une projection, associer appartenance et orthogonalité ; pour une distance, calculer ensuite une norme. Ne pas confondre directions orthogonales et droites perpendiculaires.
