Chapitre 05 – Corrections

Récurrence et convergence des suites

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Récurrence et premiers termes

$u_1 = 4$, $u_2 = 7$. On conjecture $u_m = 1 + 3m$. Initialisation en zéro ; si la formule vaut au rang m, alors $u_{m+1} = 1 + 3m + 3 = 1 + 3(m + 1)$. La récurrence conclut.

Exercice 2 – Récurrence et premiers termes

$u_1 = 5$, $u_2 = 8$. On conjecture $u_m = 2 + 3m$. Initialisation en zéro ; si la formule vaut au rang m, alors $u_{m+1} = 2 + 3m + 3 = 2 + 3(m + 1)$. La récurrence conclut.

Exercice 3 – Récurrence et premiers termes

$u_1 = 6$, $u_2 = 9$. On conjecture $u_m = 3 + 3m$. Initialisation en zéro ; si la formule vaut au rang m, alors $u_{m+1} = 3 + 3m + 3 = 3 + 3(m + 1)$. La récurrence conclut.

Exercice 4 – Récurrence et premiers termes

$u_1 = 7$, $u_2 = 10$. On conjecture $u_m = 4 + 3m$. Initialisation en zéro ; si la formule vaut au rang m, alors $u_{m+1} = 4 + 3m + 3 = 4 + 3(m + 1)$. La récurrence conclut.

Exercice 5 – Récurrence et premiers termes

$u_1 = 8$, $u_2 = 11$. On conjecture $u_m = 5 + 3m$. Initialisation en zéro ; si la formule vaut au rang m, alors $u_{m+1} = 5 + 3m + 3 = 5 + 3(m + 1)$. La récurrence conclut.

Exercice 6 – Suite géométrique

Les termes sont strictement positifs et $u_{m+1} = (3/4)u_m < u_m$. Comme $0 < 3/4 < 1$, $(3/4)^m$ tend vers zéro. Ainsi u_m tend vers zéro.

Exercice 7 – Suite géométrique

Les termes sont strictement positifs et $u_{m+1} = (3/4)u_m < u_m$. Comme $0 < 3/4 < 1$, $(3/4)^m$ tend vers zéro. Ainsi u_m tend vers zéro.

Exercice 8 – Suite géométrique

Les termes sont strictement positifs et $u_{m+1} = (3/4)u_m < u_m$. Comme $0 < 3/4 < 1$, $(3/4)^m$ tend vers zéro. Ainsi u_m tend vers zéro.

Exercice 9 – Suite géométrique

Les termes sont strictement positifs et $u_{m+1} = (3/4)u_m < u_m$. Comme $0 < 3/4 < 1$, $(3/4)^m$ tend vers zéro. Ainsi u_m tend vers zéro.

Exercice 10 – Suite géométrique

Les termes sont strictement positifs et $u_{m+1} = (3/4)u_m < u_m$. Comme $0 < 3/4 < 1$, $(3/4)^m$ tend vers zéro. Ainsi u_m tend vers zéro.

Exercice 11 – Suite arithmético-géométrique

$L = L/2 + 1$ donne $L = 2$. $v_m = u_m - L$ vérifie $v_{m+1} = v_m/2$ et $v_0 = -2$. Donc $u_m = 2(1 - 2^{-m})$ et sa limite est 2.

Exercice 12 – Suite arithmético-géométrique

$L = L/2 + 2$ donne $L = 4$. $v_m = u_m - L$ vérifie $v_{m+1} = v_m/2$ et $v_0 = -4$. Donc $u_m = 4(1 - 2^{-m})$ et sa limite est 4.

Exercice 13 – Suite arithmético-géométrique

$L = L/2 + 3$ donne $L = 6$. $v_m = u_m - L$ vérifie $v_{m+1} = v_m/2$ et $v_0 = -6$. Donc $u_m = 6(1 - 2^{-m})$ et sa limite est 6.

Exercice 14 – Suite arithmético-géométrique

$L = L/2 + 4$ donne $L = 8$. $v_m = u_m - L$ vérifie $v_{m+1} = v_m/2$ et $v_0 = -8$. Donc $u_m = 8(1 - 2^{-m})$ et sa limite est 8.

Exercice 15 – Suite arithmético-géométrique

$L = L/2 + 5$ donne $L = 10$. $v_m = u_m - L$ vérifie $v_{m+1} = v_m/2$ et $v_0 = -10$. Donc $u_m = 10(1 - 2^{-m})$ et sa limite est 10.

Exercice 16 – Approfondissement — Convergence avec invariance

On a $L^2 = 1 + L$. L'invariance de $[0; L]$ vient de la croissance de la racine carrée : si $0 \leq u_m \leq L$, alors $0 \leq u_{m+1} \leq \sqrt{1 + L} = L$. $u_1 = 1 \geq u_0$ et la croissance de la fonction transmet $u_m \geq u_{m-1}$ au rang suivant. La suite croissante majorée converge vers $\ell \geq 0$. Par continuité, $\ell^2 - \ell - 1 = 0$; seule sa racine positive L convient.

Exercice 17 – Approfondissement — Convergence avec invariance

On a $L^2 = 4 + L$. L'invariance de $[0; L]$ vient de la croissance de la racine carrée : si $0 \leq u_m \leq L$, alors $0 \leq u_{m+1} \leq \sqrt{4 + L} = L$. $u_1 = 2 \geq u_0$ et la croissance de la fonction transmet $u_m \geq u_{m-1}$ au rang suivant. La suite croissante majorée converge vers $\ell \geq 0$. Par continuité, $\ell^2 - \ell - 4 = 0$; seule sa racine positive L convient.

Exercice 18 – Approfondissement — Convergence avec invariance

On a $L^2 = 9 + L$. L'invariance de $[0; L]$ vient de la croissance de la racine carrée : si $0 \leq u_m \leq L$, alors $0 \leq u_{m+1} \leq \sqrt{9 + L} = L$. $u_1 = 3 \geq u_0$ et la croissance de la fonction transmet $u_m \geq u_{m-1}$ au rang suivant. La suite croissante majorée converge vers $\ell \geq 0$. Par continuité, $\ell^2 - \ell - 9 = 0$; seule sa racine positive L convient.

Exercice 19 – Approfondissement — Convergence avec invariance

On a $L^2 = 16 + L$. L'invariance de $[0; L]$ vient de la croissance de la racine carrée : si $0 \leq u_m \leq L$, alors $0 \leq u_{m+1} \leq \sqrt{16 + L} = L$. $u_1 = 4 \geq u_0$ et la croissance de la fonction transmet $u_m \geq u_{m-1}$ au rang suivant. La suite croissante majorée converge vers $\ell \geq 0$. Par continuité, $\ell^2 - \ell - 16 = 0$; seule sa racine positive L convient.

Exercice 20 – Approfondissement — Convergence avec invariance

On a $L^2 = 25 + L$. L'invariance de $[0; L]$ vient de la croissance de la racine carrée : si $0 \leq u_m \leq L$, alors $0 \leq u_{m+1} \leq \sqrt{25 + L} = L$. $u_1 = 5 \geq u_0$ et la croissance de la fonction transmet $u_m \geq u_{m-1}$ au rang suivant. La suite croissante majorée converge vers $\ell \geq 0$. Par continuité, $\ell^2 - \ell - 25 = 0$; seule sa racine positive L convient.