Chapitre 06 – Cours

Limites de fonctions et asymptotes

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Calculer des limites et lever des formes indéterminées
- Interpréter les asymptotes

Comprendre les notions

Une étude locale ou à l'infini

Définition – Notion de départ

Une limite décrit le comportement de f(x) lorsque x approche un nombre ou s'éloigne vers un infini. Les limites à gauche et à droite peuvent différer. Pour une fraction dont le dénominateur tend vers zéro, son signe est décisif. La fonction $1/(x-a)$ tend vers $-\infty$ à gauche de a et $+\infty$ à droite. Les opérations sur les limites s'appliquent hors des formes indéterminées comme $\infty - \infty$, $0/0$ ou ∞/∞.

Propriété – Lecture et conséquences

Ces écritures ne sont pas des résultats : elles signalent qu'une transformation est nécessaire.

Méthodes usuelles

Propriété – Lecture et conséquences

Pour un polynôme à l'infini, factoriser par le terme de plus haut degré. Pour un quotient rationnel, diviser par une puissance adaptée. Une différence contenant une racine peut être transformée à l'aide de la quantité conjuguée. Les comparaisons et les gendarmes restent des outils essentiels. Une composition exige de suivre la limite de l'expression intérieure, puis celle de la fonction extérieure au bon endroit.

Interprétation graphique

Propriété – Lecture et conséquences

Si f tend vers un réel L quand x tend vers un infini, la droite $y = L$ est une asymptote horizontale. Une limite infinie en a donne une asymptote verticale $x = a$. Une courbe peut couper une asymptote horizontale ; l'asymptote décrit une tendance et non une frontière infranchissable. Par exemple $(2x^2 + 1)/(x^2 + 3)$ tend vers deux. La différence avec deux vaut $-5/(x^2 + 3)$: la courbe reste sous l'asymptote, et s'en rapproche aux deux infinis.

Comparer deux fonctions

Définition – Comparer deux fonctions

Un encadrement relie des fonctions au voisinage du point étudié, pas seulement en quelques valeurs. Si $g \leq f \leq h$ et si g et h ont la même limite réelle L, le théorème des gendarmes donne la limite de f.

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

Les deux bornes tendent vers zéro à l'infini. Lorsque la limite est infinie, une seule comparaison peut suffire, en choisissant le bon sens de l'inégalité.

Deux exemples résolus

Exemple résolu – Un quotient rationnel

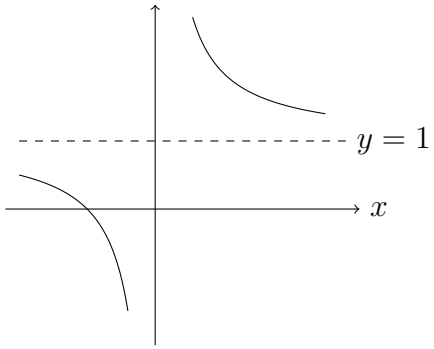
1. Pour $f(x) = (3x^2 - x)/(x^2 + 1)$, le quotient initial conduit à une forme indéterminée à l'infini. On divise les deux membres par x^2.
2. On obtient $f(x) = (3 - 1/x)/(1 + 1/x^2)$, donc la limite vaut trois aux deux infinis.
3. La droite $y = 3$ est une asymptote horizontale. Comme $f(x) - 3 = (-x - 3)/(x^2 + 1)$, la courbe la coupe en $x = -3$.

Exemple résolu – Une différence de racines

1. Cherchons la limite de $\sqrt{x^2 + x} - x$ quand $x \to +\infty$. La différence d'infinis ne se calcule pas directement.

2. Multiplier par la quantité conjuguée donne $x/(\sqrt{x^2+x}+x)$. Pour $x>0$, cela devient $1/(\sqrt{1+1/x}+1)$.
3. La limite est donc $1/2$. Le signe positif est cohérent : pour $x>0$, la racine initiale dépasse x.

Une représentation pour comprendre



Branches de la courbe $y=1+1/x$, asymptotes $x=0$ et $y=1$.

Le schéma représente deux branches d'une fonction ayant une asymptote verticale et une asymptote horizontale. Les pointillés sont des droites de référence ; ils ne font pas partie de la courbe. Les branches proches d'un pôle doivent être étudiées séparément à gauche et à droite. Pour une composition, suivre les étapes : si $u(x)\to 0^+$, alors $\ln(u(x))\to -\infty$. L'information de côté est indispensable pour le logarithme et les racines.

Une expression située hors du domaine ne peut pas servir de chemin d'approche ; on prend les limites uniquement à travers les valeurs autorisées.

À retenir – Mini-bilan

Identifier le lieu d'approche et le domaine. Transformer les formes indéterminées par factorisation ou conjugaison ; utiliser ensuite opérations ou comparaisons. Une asymptote décrit une limite, sans interdire tout croisement.