Chapitre 08 – Cours

Dérivation, convexité et optimisation

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Étudier variations et convexité
- Utiliser tangentes et dérivées composées

Comprendre les notions

Dériver une composition

Définition – Notion de départ

Pour des fonctions dérivables, $(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$. On retrouve ainsi $(e^u)' = u'e^u$, $(\ln u)' = u'/u$ si u est strictement positive, et les règles sur les puissances. Il faut préciser l'intervalle où le calcul est autorisé. Une dérivée est un outil de variation sur un intervalle : une étude séparée peut être nécessaire de part et d'autre d'une valeur interdite.

Variations et optimisation

Propriété – Lecture et conséquences

Le signe de f' détermine les variations de f. Si f' passe du positif au négatif, on obtient un maximum local ; du négatif au positif, un minimum local. L'annulation de f' seule ne suffit pas, comme le montre x^3 en zéro. Dans un problème d'optimisation, déterminer d'abord la variable et son domaine, puis examiner les bornes lorsque celles-ci sont autorisées.

Convexité

Propriété – Lecture et conséquences

Une fonction dérivable est convexe sur un intervalle lorsque sa dérivée y est croissante. Si f est deux fois dérivable, $f'' \geq 0$ constitue un critère de convexité ; $f'' \leq 0$ donne la concavité. La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes. Un point d'inflexion correspond à un changement de convexité : une dérivée seconde nulle sans

changement de signe ne suffit pas. Par exemple, e^x est convexe et sa tangente en zéro est $1 + x$, d'où $e^x \geq 1 + x$.

Propriété – Lecture et conséquences

Cette inégalité vient d'une propriété globale sur R, pas seulement d'une approximation près de zéro. Elle illustre l'intérêt de relier un calcul de dérivées à une interprétation géométrique.

Tangente et point d'inflexion

Définition – Tangente et point d'inflexion

La tangente en a est la droite partageant avec la courbe sa valeur et sa pente au point d'abscisse a. Pour une fonction convexe dérivable, toutes les tangentes sont situées sous la courbe sur l'intervalle de convexité.

$$T_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Un point d'inflexion correspond à un changement de convexité. La condition $f''(a) = 0$ est seulement un indice lorsque la dérivée seconde existe : il faut examiner les signes autour de a.

Deux exemples résolus

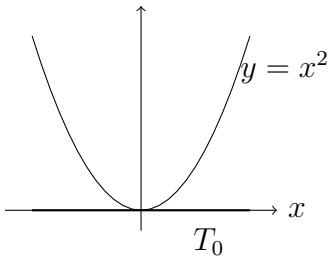
Exemple résolu – Optimiser une aire

1. Un rectangle de périmètre vingt possède des côtés x et $10 - x$, avec $0 < x < 10$. Son aire est $A(x) = 10x - x^2$.
2. La dérivée $A'(x) = 10 - 2x$ est positive avant cinq, nulle en cinq et négative ensuite. L'aire atteint donc son maximum pour $x = 5$.
3. Le rectangle optimal est un carré de côté cinq et d'aire vingt-cinq. La dérivée seconde -2 confirme la concavité sur tout le domaine.

Exemple résolu – Étudier un changement de convexité

1. Pour $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$. La dérivée seconde est négative à gauche de zéro et positive à droite.
2. L'origine est donc un point d'inflexion. La tangente y a pour équation $y = 0$; la courbe la traverse, car x^3 change de signe.
3. Cependant zéro n'est pas un extremum : f' reste positive de part et d'autre. Une pente momentanément nulle n'est pas synonyme de sommet.

Une représentation pour comprendre



La parabole convexe est au-dessus de sa tangente en zéro.

La parabole et sa tangente au sommet rendent visible la distinction entre pente et courbure. Au sommet, la pente s'annule ; autour, le signe de la dérivée change. Pour une parabole convexe, la tangente reste sous la courbe sur tout le domaine. Dans une composition, la dérivée de la fonction intérieure ne doit jamais disparaître. Ainsi $f(x) = e^{-x^2}$ donne $f'(x) = -2xe^{-x^2}$: l'exponentielle est toujours positive, donc le signe dépend uniquement de $-x$.

Cet exemple montre l'intérêt de factoriser avant de construire le tableau de variations.

À retenir – Mini-bilan

La première dérivée commande les variations ; la seconde commande la convexité. Justifier les changements de signe. Pour optimiser une grandeur, inclure les contraintes du problème et comparer les valeurs aux bornes autorisées.