

Chapitre 10 – Cours

Fonctions sinus et cosinus

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Étudier dérivées, variations et équations trigonométriques
- Résoudre un problème d'optimisation avec des angles

Comprendre les notions

Des fonctions périodiques

Définition – Notion de départ

Le sinus et le cosinus sont définis sur $\mathbb{R}$ à partir du cercle trigonométrique. Ils sont de période 2π ; le cosinus est pair et le sinus impair. Leur identité fondamentale est $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Les angles sont exprimés en radians dans les formules de dérivation. Il faut distinguer une égalité d'angles sur le cercle et une égalité de nombres réels : des angles décalés d'un tour ont la même image, mais restent des réels différents.

Dérivées et variations

Propriété – Lecture et conséquences

Les formules sont $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$. Sur $[0; \pi]$, le cosinus décroît de un à moins un. Sur $[-\pi/2; \pi/2]$, le sinus croît de moins un à un. La périodicité et les symétries permettent de prolonger l'étude. Pour une composition affine, $(\sin(ax+b))' = a \cos(ax+b)$ et $(\cos(ax+b))' = -a \sin(ax+b)$.

Première lecture : Résolution et application

Propriété – Lecture et conséquences

Pour résoudre $\cos x = 1/2$ sur $[-\pi; \pi]$, repérer les deux points du cercle d'abscisse un demi : les solutions sont $-\pi/3$ et $\pi/3$. Une inéquation se traite en identifiant les arcs correspondants, puis en vérifiant les bornes. Dans un problème d'optimisation, traduire

d'abord les contraintes géométriques en intervalle d'angles ; dériver ensuite la fonction étudiée et examiner aussi les extrémités du domaine. Un dessin complète le raisonnement mais ne remplace pas les propriétés de signe utilisées.

Amplitude et période

Définition – Amplitude et période

Dans un modèle $a \cos(\omega t + \varphi) + b$, le nombre b donne le niveau central et $|a|$ l'amplitude. Si $\omega \neq 0$, une période est $2\pi/|\omega|$; la phase déplace les moments où les sommets sont atteints.

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

Une équation trigonométrique sur $\mathbb{R}$ possède souvent une infinité de solutions. On les décrit par un entier puis on sélectionne celles qui appartiennent à l'intervalle demandé.

Deux exemples résolus

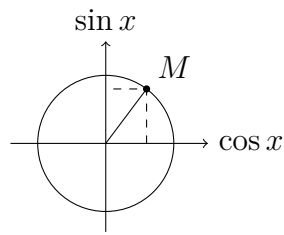
Exemple résolu – Résoudre une équation de sinus

1. Sur $[0; 2\pi]$, cherchons $\sin x = 1/2$. Sur le cercle unité, l'ordonnée un demi correspond aux angles $\pi/6$ et $5\pi/6$.
 2. Les solutions générales sont $\pi/6 + 2k\pi$ ou $5\pi/6 + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. Sur l'intervalle imposé, seul $k = 0$ convient dans chaque famille.
 3. Il reste donc exactement deux solutions. Les bornes zéro et 2π ont un sinus nul et ne conviennent pas.
-

Exemple résolu – Optimiser un produit trigonométrique

1. Pour $x \in [0; \pi/2]$, posons $A(x) = \sin x \cos x$. La règle du produit donne $A'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$.
 2. Le signe est positif avant $\pi/4$ puis négatif après. Le maximum est atteint en $\pi/4$ et vaut $1/2$.
 3. Aux bornes, l'aire modélisée vaut zéro. L'identité $A(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$ confirme directement le majorant $1/2$.
-

Une représentation pour comprendre



Sur le cercle unité, M a pour coordonnées $(\cos x; \sin x)$.

Le cercle montre comment un même point fournit une abscisse et une ordonnée. Le cosinus est la projection sur l'axe horizontal ; le sinus est la projection sur l'axe vertical. Un tour complet ajoute 2π sans changer ces projections. Les signes des dérivées se lisent grâce aux demi-cercles. Sur $[0; \pi]$, le sinus est positif, donc la dérivée du cosinus est négative.

Pour une composée comme $\cos(3x)$, la pente comporte le facteur trois : l'oscillation plus rapide modifie aussi les intervalles sur lesquels on doit étudier le signe.

À retenir – Mini-bilan

Travailler en radians, utiliser cercle, symétries et périodicité. Dériver en tenant compte du facteur intérieur. Donner toutes les familles de solutions puis les restreindre au domaine demandé.
