

Chapitre 12 – Cours

Calcul intégral et aires

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Relier intégrale et primitive
- Calculer des aires, valeurs moyennes et intégrales par parties

Comprendre les notions

De l'aire à l'intégrale

Définition – Notion de départ

Pour une fonction continue positive sur $[a; b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ représente l'aire sous sa courbe. Pour une fonction de signe quelconque, les parties sous l'axe contribuent négativement. Une intégrale peut donc être négative ou nulle sans que l'aire géométrique soit nulle. Si F est une primitive de f , le théorème fondamental donne $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Propriétés et estimations

Propriété – Lecture et conséquences

L'intégrale est linéaire et vérifie la relation de Chasles. Si f est inférieure à g sur un intervalle orienté de gauche à droite, leurs intégrales respectent cet ordre. Si $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$. La valeur moyenne de f est $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$, pour a strictement inférieur à b .

Intégrer par parties

Propriété – Lecture et conséquences

Pour des fonctions suffisamment régulières, $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$. Il faut choisir la fonction à dériver pour simplifier la nouvelle intégrale. Par exemple, intégrer xe^x conduit à $(x-1)e^x$ comme primitive.

Première lecture : application géométrique

Propriété – Lecture et conséquences

Sur $[0; 1]$, $x \geq x^2$. L'aire entre la droite $y = x$ et la parabole $y = x^2$ vaut $\int_0^1 (x - x^2) dx = 1/6$. Le signe a été justifié avant le calcul. Si les courbes se croisent à l'intérieur de l'intervalle, il faut partager le domaine et choisir sur chaque morceau la fonction supérieure moins la fonction inférieure.

Une aire entre deux courbes

Définition – Une aire entre deux courbes

L'aire géométrique est toujours positive ou nulle. Entre deux fonctions continues f et g , on intègre la fonction supérieure moins l'inférieure ; si l'ordre s'inverse, on partage l'intervalle aux points de croisement.

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (a < b).$$

L'intégrale sans valeur absolue calcule une différence d'aires et peut annuler des contributions. Les unités d'aire sont le produit des unités portées sur les deux axes.

Deux exemples résolus

Exemple résolu – Une intégration par parties

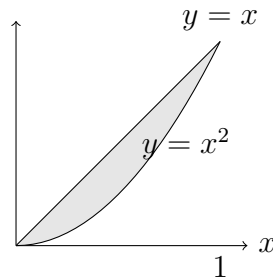
1. Calculons $I = \int_0^1 x e^x dx$. On prend $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, donc $u' = 1$ et $v = e^x$.
 2. La formule donne $I = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$.
 3. Une primitive est $(x - 1)e^x$; sa dérivée vaut bien $x e^x$. Ce contrôle permet de vérifier le signe introduit par l'intégration par parties.
-

Exemple résolu – Séparer aire et intégrale

1. Pour $f(x) = x$ sur $[-1; 1]$, une primitive est $x^2/2$. L'intégrale vaut $1/2 - 1/2 = 0$.
2. Pourtant la région comprise entre la droite et l'axe possède deux triangles d'aire $1/2$. Son aire totale vaut un.

3. Le calcul correct de l'aire est $-\int_{-1}^0 x \, dx + \int_0^1 x \, dx = 1$. Le découpage suit le changement de signe en zéro.
-

Une représentation pour comprendre



Axes gradués à la même échelle : le point de coordonnées (1;1) est dessiné en (3;3).

Le dessin montre la région entre la droite et la parabole sur $[0; 1]$. Leurs intersections sont les bornes ; à l'intérieur, $x - x^2 = x(1 - x)$ est positif. L'ordre des courbes est donc établi algébriquement avant d'utiliser l'aire grisée. Une valeur moyenne a la même unité que f . Pour un débit exprimé en litres par minute, intégrer sur un temps en minutes donne un volume en litres ; diviser ensuite par la durée donne de nouveau un débit.

Cette interprétation distingue une quantité cumulée de son rythme moyen et aide à choisir la formule adaptée.

À retenir – Mini-bilan

Primitive : différence aux bornes. Aire : ordre des courbes et découpage. Valeur moyenne : intégrale divisée par la longueur de l'intervalle. Par parties : choisir un produit dont une dérivation simplifie le calcul.
