

Chapitre 15 – Corrections

Concentration et loi des grands nombres

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Bienaymé-Tchebychev

Pour tout seuil positif a , $P(|X - E(X)| \geq a) \leq V(X)/a^2$. Ici la borne vaut $4/9 = \frac{4}{9}$.

Exercice 2 – Bienaymé-Tchebychev

Pour tout seuil positif a , $P(|X - E(X)| \geq a) \leq V(X)/a^2$. Ici la borne vaut $4/16 = \frac{1}{4}$.

Exercice 3 – Bienaymé-Tchebychev

Pour tout seuil positif a , $P(|X - E(X)| \geq a) \leq V(X)/a^2$. Ici la borne vaut $4/25 = \frac{4}{25}$.

Exercice 4 – Bienaymé-Tchebychev

Pour tout seuil positif a , $P(|X - E(X)| \geq a) \leq V(X)/a^2$. Ici la borne vaut $4/36 = \frac{1}{9}$.

Exercice 5 – Bienaymé-Tchebychev

Pour tout seuil positif a , $P(|X - E(X)| \geq a) \leq V(X)/a^2$. Ici la borne vaut $4/49 = \frac{4}{49}$.

Exercice 6 – Concentration d'une moyenne

$V(M) = 1/100$. La borne est $(1/100)/0,04 = 1/4 = \frac{1}{4}$.

Exercice 7 – Concentration d'une moyenne

$V(M) = 1/200$. La borne est $(1/200)/0,04 = 1/8 = \frac{1}{8}$.

Exercice 8 – Concentration d'une moyenne

$V(M) = 1/300$. La borne est $(1/300)/0,04 = 1/12 = \frac{1}{12}$.

Exercice 9 – Concentration d'une moyenne

$V(M) = 1/400$. La borne est $(1/400)/0,04 = 1/16 = \frac{1}{16}$.

Exercice 10 – Concentration d'une moyenne

$V(M) = 1/500$. La borne est $(1/500)/0,04 = 1/20 = \frac{1}{20}$.

Exercice 11 – Taille suffisante

Pour une taille N , la borne est $(1/4)/(N/100) = 25/N$. Il suffit donc que $25/N \leq 1/5$, soit $N \geq 125$. C'est une garantie suffisante, pas nécessairement la taille minimale réelle.

Exercice 12 – Taille suffisante

Pour une taille N , la borne est $(1/4)/(N/100) = 25/N$. Il suffit donc que $25/N \leq 1/6$, soit $N \geq 150$. C'est une garantie suffisante, pas nécessairement la taille minimale réelle.

Exercice 13 – Taille suffisante

Pour une taille N , la borne est $(1/4)/(N/100) = 25/N$. Il suffit donc que $25/N \leq 1/7$, soit $N \geq 175$. C'est une garantie suffisante, pas nécessairement la taille minimale réelle.

Exercice 14 – Taille suffisante

Pour une taille N , la borne est $(1/4)/(N/100) = 25/N$. Il suffit donc que $25/N \leq 1/8$, soit $N \geq 200$. C'est une garantie suffisante, pas nécessairement la taille minimale réelle.

Exercice 15 – Taille suffisante

Pour une taille N , la borne est $(1/4)/(N/100) = 25/N$. Il suffit donc que $25/N \leq 1/9$, soit $N \geq 225$. C'est une garantie suffisante, pas nécessairement la taille minimale réelle.

Exercice 16 – Approfondissement — Loi des grands nombres

$V(F_N) = 1/(4N)$, donc la probabilité est majorée par $9/(4N)$, qui tend vers zéro. Pour une borne au plus $1/100$, il suffit de $N \geq 225$. On obtient une convergence en probabilité, pas une erreur nulle pour chaque échantillon.

Exercice 17 – Approfondissement — Loi des grands nombres

$V(F_N) = 1/(4N)$, donc la probabilité est majorée par $16/(4N)$, qui tend vers zéro. Pour une borne au plus $1/100$, il suffit de $N \geq 400$. On obtient une convergence en probabilité, pas une erreur nulle pour chaque échantillon.

Exercice 18 – Approfondissement — Loi des grands nombres

$V(F_N) = 1/(4N)$, donc la probabilité est majorée par $25/(4N)$, qui tend vers zéro. Pour une borne au plus $1/100$, il suffit de $N \geq 625$. On obtient une convergence en probabilité, pas une erreur nulle pour chaque échantillon.

Exercice 19 – Approfondissement — Loi des grands nombres

$V(F_N) = 1/(4N)$, donc la probabilité est majorée par $36/(4N)$, qui tend vers zéro. Pour une borne au plus $1/100$, il suffit de $N \geq 900$. On obtient une convergence en probabilité, pas une erreur nulle pour chaque échantillon.

Exercice 20 – Approfondissement — Loi des grands nombres

$V(F_N) = 1/(4N)$, donc la probabilité est majorée par $49/(4N)$, qui tend vers zéro. Pour une borne au plus $1/100$, il suffit de $N \geq 1225$. On obtient une convergence en probabilité, pas une erreur nulle pour chaque échantillon.