

Chapitre 01 – Cours

Logique, ensembles et applications

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Nier un énoncé quantifié
- Choisir une méthode de preuve
- Distinguer image et image réciproque

1. Énoncés et quantificateurs

Un énoncé mathématique a une valeur de vérité.

L'implication $P \Rightarrow Q$ signifie que, lorsque P est vraie, Q l'est aussi.

Elle ne doit pas être confondue avec sa réciproque $Q \Rightarrow P$.

En revanche, sa contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$ lui est équivalente.

L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ exige deux implications.

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ signifient respectivement « pour tout » et « il existe ».

Nier $\forall x \in E, P(x)$ donne $\exists x \in E, \neg P(x)$.

Nier une existence donne une proposition universelle.

L'ordre des quantificateurs compte : $\forall x \exists y$ ne signifie généralement pas $\exists y \forall x$.

2. Ensembles et opérations

L'inclusion $A \subset B$ signifie que chaque élément de A appartient à B .

Pour démontrer une égalité d'ensembles, on établit souvent une double inclusion.

L'intersection impose deux conditions simultanées ; la réunion impose au moins une condition.

Le complémentaire est toujours relatif à un univers précisé.

Une partition est une famille de parties non vides, deux à deux disjointes, dont la réunion est l'univers.

3. Applications

Une application $f : E \rightarrow F$ est définie avec un domaine et un ensemble d'arrivée.

Elle est injective si $f(x) = f(y)$ implique $x = y$, surjective si tout élément de F possède un antécédent, bijective si elle possède les deux propriétés.

Dans ce dernier cas seulement, une application réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ existe.

Pour une partie B de F , l'image réciproque $f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$ existe même si f n'est pas bijective.

4. Méthodes de démonstration

Une preuve directe part des hypothèses.

Un contre-exemple réfute un énoncé universel, mais ne prouve pas une généralité.

Une preuve par l'absurde suppose la négation de la conclusion.

Pour une récurrence, on distingue initialisation et hérédité, en précisant le premier rang.

L'analyse-synthèse cherche les solutions possibles puis vérifie qu'elles conviennent.

5. Exemple résolu

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$, est bijective : pour tout réel y , l'équation $f(x) = y$ possède l'unique solution $x = (y - 3)/2$.

En revanche, $x \mapsto x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ car 1 et -1 ont la même image.

Elle devient bijective de $[0; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$.

À retenir

Préciser les ensembles, respecter les quantificateurs, justifier chaque implication et vérifier une solution proposée sont des habitudes transversales à toute l'année.

Lire une définition avant de calculer

Définition – Image et antécédents

L'image de x par f est l'unique élément $f(x)$. Un antécédent de y est une solution de $f(x) = y$; il peut ne pas exister ou ne pas être unique. L'image directe d'une partie A est $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.

Exemple résolu – 1. Une égalité d'ensembles, en trois étapes

Soient $f : E \rightarrow F$ et $A, B \subset F$. Montrons que l'image réciproque transforme une intersection en intersection.

1. Fixer un élément arbitraire $x \in E$. Appartenir à $f^{-1}(A \cap B)$ signifie que son image appartient simultanément à A et à B .
2. Réécrire séparément ces deux conditions : $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$.
3. Chaque reformulation est une équivalence. On obtient donc les deux inclusions nécessaires, sans supposer f injective ou surjective.

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

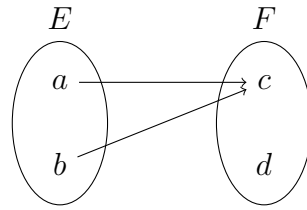
Exemple résolu – 2. Construire une récurrence

Démontrons $2^n \geq n + 1$ pour tout entier $n \geq 0$.

1. Initialisation : au rang zéro, les deux membres valent 1. Le premier rang est donc établi.
2. Hérédité : supposons $2^n \geq n + 1$ pour un entier $n \geq 0$. Multiplier par 2, qui est positif, conserve le sens de l'inégalité.
3. Comparer au résultat attendu au rang suivant : $2n + 2 \geq n + 2$ puisque $n \geq 0$. Ainsi $2^{n+1} \geq n + 2$, ce qui achève l'hérédité.

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n + 1) \geq (n + 1) + 1.$$

Voir les antécédents



Ici c a deux antécédents et d n'en a aucun. Le dessin réfute donc à la fois l'injectivité et la surjectivité de cette application ; il ne représente pas une bijection.

À retenir – Bilan

Une preuve commence par des objets précisément définis et des hypothèses identifiées. Pour une implication, distinguer ce qui est supposé de ce qui reste à obtenir ; pour une existence, produire un objet ou invoquer un théorème applicable ; pour une unicité, comparer deux candidats.
