

Chapitre 01 – Exercices

Logique, ensembles et applications

20 exercices progressifs

Exercice 1 – Quantificateurs

Nier l'énoncé $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 2$. Dire si cet énoncé est vrai.

Exercice 2 – Quantificateurs

Nier l'énoncé $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 3$. Dire si cet énoncé est vrai.

Exercice 3 – Quantificateurs

Nier l'énoncé $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 5$. Dire si cet énoncé est vrai.

Exercice 4 – Image réciproque

Pour $f(x) = x^2$, déterminer $f^{-1}([1; 9])$.

Exercice 5 – Image réciproque

Pour $f(x) = x^2$, déterminer $f^{-1}([4; 16])$.

Exercice 6 – Image réciproque

Pour $f(x) = x^2$, déterminer $f^{-1}([16; 36])$.

Exercice 7 – Bijection affine

Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$, est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 8 – Bijection affine

Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$, est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 9 – Bijection affine

Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x - 1$, est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 10 – Inclusion et contre-exemple

Comparer $A = [-2; 2]$ et $B = [0; 3]$: inclusion, intersection et réunion.

Exercice 11 – Inclusion et contre-exemple

Comparer $A = [-3; 3]$ et $B = [0; 4]$: inclusion, intersection et réunion.

Exercice 12 – Inclusion et contre-exemple

Comparer $A = [-4; 4]$ et $B = [0; 5]$: inclusion, intersection et réunion.

Exercice 13 – Composition

Pour $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$, calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Sont-elles égales ?

Exercice 14 – Composition

Pour $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2$, calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Sont-elles égales ?

Exercice 15 – Composition

Pour $f(x) = 5x + 1$ et $g(x) = x^2$, calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Sont-elles égales ?

Exercice 16 – Approfondissement : contraposition

Prouver que si n^2 est pair, alors l'entier n est pair.

Exercice 17 – Approfondissement : récurrence

Prouver $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$ pour $n \geq 1$.

Exercice 18 – Approfondissement : injectivité

La fonction $x \mapsto x^2$ est-elle injective sur $\mathbb{R}$? Sur $[0; +\infty[$? Préciser son image.

Exercice 19 – Approfondissement : lois de De Morgan

Prouver $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$ pour $A, B \subset E$.

Exercice 20 – Approfondissement : analyse-synthèse

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(x) + 2f(-x) = 3x$ pour tout x .