

Chapitre 03 – Corrections

Nombres complexes et géométrie

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Calcul complexe

$\bar{z} = 1 - (2)i$, $|z|^2 = 5$. Comme $z \neq 0$, $1/z = \bar{z}/|z|^2 = (1 - (2)i)/5$.

Exercice 2 – Calcul complexe

$\bar{z} = 2 - (-3)i$, $|z|^2 = 13$. Comme $z \neq 0$, $1/z = \bar{z}/|z|^2 = (2 - (-3)i)/13$.

Exercice 3 – Calcul complexe

$\bar{z} = -1 - (4)i$, $|z|^2 = 17$. Comme $z \neq 0$, $1/z = \bar{z}/|z|^2 = (-1 - (4)i)/17$.

Exercice 4 – Racines de l'unité

$z_k = \exp(2ik\pi/3)$, $k = 0, \dots, 2$. Il y a 3 racines distinctes, placées sur le cercle unité aux sommets d'un polygone régulier.

Exercice 5 – Racines de l'unité

$z_k = \exp(2ik\pi/4)$, $k = 0, \dots, 3$. Il y a 4 racines distinctes, placées sur le cercle unité aux sommets d'un polygone régulier.

Exercice 6 – Racines de l'unité

$z_k = \exp(2ik\pi/6)$, $k = 0, \dots, 5$. Il y a 6 racines distinctes, placées sur le cercle unité aux sommets d'un polygone régulier.

Exercice 7 – Équation du second degré

$z^2 = -1 = (1i)^2$, donc $z = \pm 1i$. La factorisation $(z - 1i)(z + 1i) = 0$ confirme les deux solutions.

Exercice 8 – Équation du second degré

$z^2 = -4 = (2i)^2$, donc $z = \pm 2i$. La factorisation $(z - 2i)(z + 2i) = 0$ confirme les deux solutions.

Exercice 9 – Équation du second degré

$z^2 = -9 = (3i)^2$, donc $z = \pm 3i$. La factorisation $(z - 3i)(z + 3i) = 0$ confirme les deux solutions.

Exercice 10 – Forme exponentielle

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, donc la puissance vaut $2^{2/2}e^{i2\pi/4}$. Sous forme algébrique : $2i$.

Exercice 11 – Forme exponentielle

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, donc la puissance vaut $2^{3/2}e^{i3\pi/4}$. Sous forme algébrique : $-2 + 2i$.

Exercice 12 – Forme exponentielle

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, donc la puissance vaut $2^{4/2}e^{i4\pi/4}$. Sous forme algébrique : $-4 + 0i$.

Exercice 13 – Lieu géométrique

Le module est une distance : le lieu est le cercle de centre d'affixe 1 (point $(1;0)$) et de rayon 2. En coordonnées : $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

Exercice 14 – Lieu géométrique

Le module est une distance : le lieu est le cercle de centre d'affixe 2 (point $(2;0)$) et de rayon 2. En coordonnées : $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

Exercice 15 – Lieu géométrique

Le module est une distance : le lieu est le cercle de centre d'affixe 3 (point $(3;0)$) et de rayon 2. En coordonnées : $(x-3)^2 + y^2 = 4$.

Exercice 16 – Approfondissement : triangle

$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\Re(z\bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|$. Les deux membres sont positifs ; prendre la racine donne l'inégalité. L'égalité correspond à des vecteurs de même direction et même sens, sauf les cas nuls.

Exercice 17 – Approfondissement : quotient géométrique

En écrivant $z = x + iy$, on obtient $(x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2$, donc $x = 0$. Le lieu est l'axe imaginaire, médiatrice des points d'affixes 1 et -1 .

Exercice 18 – Approfondissement : équation réelle

On complète le carré : $(z-1)^2 = -4$. Ainsi $z = 1 \pm 2i$. Leur somme vaut 2 et leur produit 5, ce qui vérifie les coefficients.

Exercice 19 – Approfondissement : somme des racines

La raison $q = e^{2i\pi/n}$ n'est pas 1 et $q^n = 1$. La somme géométrique vaut $(1-q^n)/(1-q) = 0$.

Exercice 20 – Approfondissement : transformation

On résout $z = iz + 2$, soit $z_0 = 2/(1-i) = 1 + i$. L'égalité $z' - z_0 = i(z - z_0)$ montre une rotation de centre d'affixe $1 + i$ et d'angle $\pi/2$.