

Chapitre 03 – Cours

Nombres complexes et géométrie

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Passer entre formes algébrique et exponentielle
- Résoudre une équation complexe
- Interpréter module et argument

1. Calcul algébrique

Un complexe s'écrit de manière unique $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

On note $\Re z = a$ et $\Im z = b$.

Le conjugué est $\bar{z} = a - ib$; le module vaut $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

L'identité $z\bar{z} = |z|^2$ permet de diviser : si $z \neq 0$, $1/z = \bar{z}/|z|^2$.

On ne doit jamais diviser sans vérifier cette condition.

2. Argument et exponentielle

Pour $z \neq 0$, on choisit un argument θ tel que $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}$.

L'argument est défini modulo 2π , pas comme un réel unique sans convention.

Le module d'un produit est le produit des modules ; les arguments s'ajoutent.

La formule de Moivre $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ découle de la multiplication exponentielle.

3. Racines

Pour $w = re^{i\theta} \neq 0$, résoudre $z^n = w$ donne les n valeurs distinctes

$$z_k = r^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)/n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Le cas $w = 0$ est séparé : seule la racine $z = 0$ convient.

Pour un polynôme du second degré réel, un discriminant négatif conduit à deux racines complexes conjuguées.

Pour un discriminant complexe, on cherche d'abord une racine carrée dans $\mathbb{C}$.

4. Géométrie

Le complexe $z = x + iy$ est l'affixe du point $(x; y)$. $|z - a|$ est la distance au point d'affixe a ; $|z - a| = r$ décrit un cercle pour $r > 0$.

Une multiplication par $e^{i\theta}$ est une rotation autour de l'origine.

L'application $z \mapsto az + b$, avec $a \neq 0$, combine rotation, homothétie et translation.

Son étude est facilitée en recherchant un point fixe.

5. Exemple résolu et preuve

Pour $z = 1 + i$, on a $|z| = \sqrt{2}$ et un argument $\pi/4$.

Alors $z^4 = 4e^{i\pi} = -4$.

Le calcul algébrique donne aussi $(1 + i)^2 = 2i$, puis $(2i)^2 = -4$.

Pour tout z, w , l'inégalité triangulaire provient de $\Re(z\bar{w}) \leq |z||w|$, appliquée au carré du module.

Ce résultat sert à contrôler des distances et à majorer des expressions sans développer entièrement.

Relier algèbre et géométrie

Définition – Égalité de deux complexes

L'égalité $a + ib = c + id$ équivaut aux deux égalités réelles $a = c$ et $b = d$. Elle transforme une équation complexe en un système réel. Le module est toujours positif ou nul et ne s'annule que pour le complexe nul.

Propriété – Distances et inégalité triangulaire

Pour tous complexes z, w ,

$$||z| - |w|| \leq |z - w| \leq |z| + |w|.$$

La seconde inégalité est triangulaire ; la première s'obtient en l'appliquant à $z = (z - w) + w$, puis en échangeant z et w . Elle montre que deux points proches ont des distances à l'origine proches.

Méthode – Décrire un lieu géométrique

Pour lire $|z - a| = |z - b|$ avec $a \neq b$, traduire en distances : on cherche les points équidistants de deux points distincts. Le lieu est leur médiatrice. Si l'on préfère les coordonnées, élever les deux membres au carré puis développer ; les termes quadratiques se compensent et laissent une équation de droite. Aucune division par une expression susceptible de s'annuler n'est nécessaire.

Exemple résolu – 1. Résoudre une équation avec conjugué

Cherchons les complexes vérifiant $z + 2\bar{z} = 3 + i$.

1. Écrire $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $\bar{z} = x - iy$, et le membre gauche devient $3x - iy$.
2. Identifier séparément les parties réelle et imaginaire : $3x = 3$ et $-y = 1$. Il vient $x = 1, y = -1$.
3. Vérifier dans l'équation initiale : $(1 - i) + 2(1 + i) = 3 + i$. Les deux coordonnées étant imposées, cette solution est unique.

$$\mathcal{S} = \{1 - i\}.$$

La présence de $\bar{z}$ interdit de traiter naïvement l'expression comme une équation linéaire ordinaire en z seul.

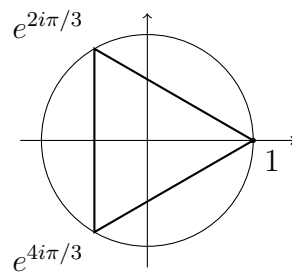
Exemple résolu – 2. Trouver les racines cubiques de l'unité

Résolvons $z^3 = 1$ dans $\mathbb{C}$.

1. Prendre les modules : $|z|^3 = 1$ impose $|z| = 1$. On peut donc écrire $z = e^{i\theta}$.
2. L'égalité $e^{3i\theta} = 1$ équivaut à $3\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Trois classes d'angles distinctes sont représentées par $0, 2\pi/3, 4\pi/3$.
3. Convertir en forme algébrique et vérifier que chaque cube vaut 1. Les trois valeurs sont distinctes ; un polynôme de degré trois ne peut avoir davantage de racines.

$$z \in \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Trois racines, trois sommets



Les arguments diffèrent de $2\pi/3$: les racines forment un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité. Ce schéma donne leur disposition et permet de contrôler modules, symétrie par conjugaison et somme nulle.

À retenir – Bilan

Choisir la forme algébrique pour identifier des coordonnées, et la forme exponentielle pour multiplier, prendre des puissances ou extraire des racines. Toujours séparer le cas zéro avant d'introduire un argument ; une égalité d'arguments se comprend modulo 2π .
