

Chapitre 05 – Cours

Limites et continuité des fonctions

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Déterminer un domaine et une limite
- Appliquer le TVI avec ses hypothèses
- Construire une bijection et sa réciproque

1. Limites locales

La limite d'une fonction en a décrit ses valeurs pour des arguments proches de a , éventuellement distincts de a .

Elle ne dépend pas de la valeur au point.

Une limite bilatérale existe si les limites à droite et à gauche existent et sont égales.

Une fonction peut ainsi avoir une limite sans être définie au point.

Les opérations sur les limites respectent des conditions semblables à celles des suites.

2. Indéterminations

Les écritures $0/0$, $\infty - \infty$ et $0 \times \infty$ ne donnent pas un résultat : elles signalent qu'une transformation est nécessaire.

On peut factoriser, mettre au même dénominateur, utiliser une quantité conjuguée ou un équivalent autorisé.

Pour $(x^2 - 1)/(x - 1)$ en 1, la factorisation donne $x + 1$ sur le domaine privé de 1, d'où la limite 2.

3. Continuité

Une fonction est continue en a si sa limite en a vaut $f(a)$.

Somme, produit, composition et quotient à dénominateur non nul préservent la continuité.

Les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}$, les fonctions rationnelles sur leur domaine.

Une fonction par morceaux demande de vérifier le raccord aux frontières, et pas seulement la continuité des expressions de chaque côté.

4. Théorèmes sur un intervalle

Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'une fonction continue sur un intervalle prend toute valeur intermédiaire entre deux de ses valeurs.

Pour prouver l'existence d'un zéro, on vérifie continuité et changement de signe.

L'unicité exige un argument supplémentaire, souvent la stricte monotonie.

Une fonction continue sur un segment atteint ses bornes.

Sur un intervalle ouvert ou non borné, cette conclusion n'est plus automatique.

5. Réciproque et méthode

Une fonction continue strictement monotone sur un intervalle réalise une bijection de cet intervalle sur son image ; sa réciproque est continue et a la même monotonie.

Les limites aux bornes déterminent précisément l'image, avec des crochets cohérents.

Par exemple e^x est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$ et sa réciproque est $\ln$.

La dichotomie exploite le TVI pour conserver un intervalle contenant une racine.

Après chaque division, sa largeur est divisée par deux.

Le contrôle de cette largeur permet de certifier la précision, contrairement à une simple lecture graphique.

Formuler une limite locale

Définition – Limite finie en un point

Dire $f(x) \rightarrow \ell$ lorsque $x \rightarrow a$ signifie que $|f(x) - \ell|$ devient arbitrairement petit dès que x est assez proche de a , avec x dans le domaine et $x \neq a$. On suppose que a est un point d'accumulation du domaine.

Exemple résolu – 1. Lever une indétermination par conjugaison

Calculons la limite de $(\sqrt{1+x} - 1)/x$ en zéro.

1. Le domaine près de zéro impose $x \geq -1$ et $x \neq 0$. La substitution directe donne $0/0$, qui n'est pas une valeur.
2. Multiplier numérateur et dénominateur par $\sqrt{1+x} + 1$. Ce facteur est strictement positif et l'identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ simplifie le numérateur.

3. Après simplification pour $x \neq 0$, utiliser la continuité de la racine puis du quotient.

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Aucune valeur n'a été attribuée au quotient initial en zéro.

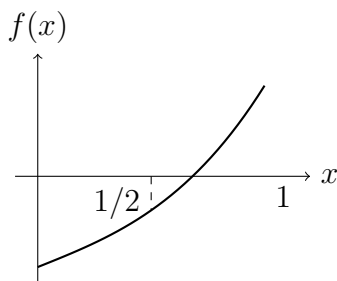
Exemple résolu – 2. Existence et unicité d'une racine

Montrons que $f(x) = x^3 + x - 1$ possède exactement un zéro dans $[0; 1]$.

1. f est polynomiale, donc continue sur le segment. Comme $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$, le TVI fournit une racine intérieure.
2. Pour $y > x$, $y^3 \geq x^3$ et $y - x > 0$, donc $f(y) - f(x) > 0$. La stricte croissance donne l'unicité, indépendamment de l'argument d'existence.
3. Une première dichotomie donne $f(1/2) = -3/8$; la racine appartient donc à $[1/2; 1]$. Après n coupures du segment initial, sa largeur vaut 2^{-n} .

Le milieu d'un intervalle certifié fournit une erreur au plus égale à sa demi-largeur.

Visualiser le changement de signe



La courbe traverse l'axe entre $1/2$ et 1 . Le dessin suggère le résultat ; la continuité justifie l'existence et la stricte croissance justifie l'unicité. Ces deux rôles ne doivent pas être confondus.

À retenir – Bilan

Avant tout passage à la limite, contrôler le domaine et les limites latérales utiles. Pour appliquer un théorème sur un segment, nommer ce segment et vérifier les hypothèses sur ses bornes. Une valeur approchée d'une racine gagne un sens mathématique lorsqu'elle est accompagnée d'un intervalle qui la contient.