

Chapitre 06 – Cours

Dérivation, accroissements finis et convexité

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Dériver une composition
- Justifier variations et extrema
- Utiliser Rolle et le TAF

1. Dérivabilité

La dérivée de f en a est la limite finie de $(f(a+h) - f(a))/h$ lorsque h tend vers zéro.

Elle représente le coefficient directeur de la tangente.

La dérivabilité implique la continuité ; la réciproque est fausse, comme le montre la valeur absolue en zéro.

L'écriture $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$ est une formulation équivalente de la dérivabilité.

2. Règles de calcul

On utilise les règles de somme, produit, quotient et composition.

La dérivée de $f \circ g$ est $(f' \circ g)g'$, en vérifiant les domaines.

La dérivée de u/v vaut $(u'v - uv')/v^2$ lorsque v ne s'annule pas.

Une expression correcte peut devenir inutilisable si elle est simplifiée en oubliant un point exclu du domaine initial.

3. Rolle et accroissements finis

Rolle exige une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, avec $f(a) = f(b)$.

Il garantit un point où la dérivée s'annule.

Le théorème des accroissements finis donne, sans l'égalité aux bornes, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ pour un point c intérieur.

Si $|f'| \leq M$, on en déduit $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

4. Variations et extrema

Sur un intervalle, une dérivée positive ou nulle donne une fonction croissante.

Une dérivée strictement positive suffit à la stricte croissance, mais n'est pas nécessaire : x^3 est strictement croissante avec une dérivée nulle en zéro.

Un extremum local intérieur d'une fonction dérivable est un point critique.

La réciproque doit être testée avec le signe de la dérivée ou une étude plus fine.

Aux extrémités du domaine, le critère de dérivée nulle ne s'applique pas directement.

5. Convexité et exemple

Une fonction est convexe lorsque son graphe reste sous ses cordes.

Si elle est dérivable, cela équivaut à la croissance de sa dérivée ; si elle est deux fois dérivable, $f'' \geq 0$ suffit et caractérise la convexité.

Elle se trouve alors au-dessus de ses tangentes.

Pour $f(x) = e^x$, la tangente en zéro est $y = 1 + x$, donc $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel.

Une étude soigneuse énonce toujours l'intervalle sur lequel la propriété est démontrée.

Distinguer taux moyen et taux instantané

Définition – Tangente et point critique

Si f est dérivable en a , la tangente a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Un point critique intérieur est un point où $f'(a) = 0$. Il peut être un extremum ou un point de passage à tangente horizontale.

Propriété – Convexité par les cordes

Sur un intervalle I , la définition précise est

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y), \quad x, y \in I, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Le membre droit est l'ordonnée de la corde. Lorsque f est dérivable sur I , la croissance de f' caractérise cette propriété. L'intervalle est essentiel pour que le point intermédiaire reste dans le domaine.

Exemple résolu – 1. Utiliser les accroissements finis pour majorer

Montrons que $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ pour tous réels x, y .

1. Si $x = y$, l'inégalité est immédiate. Sinon, le sinus est continu sur le segment joignant x à y et dérivable à son intérieur.
2. Le théorème des accroissements finis donne un réel c entre x et y tel que $\sin x - \sin y = \cos c (x - y)$.
3. Prendre les valeurs absolues et utiliser $|\cos c| \leq 1$. Cette estimation est globale : elle ne suppose pas que x et y sont proches.

$$|\sin x - \sin y| = |\cos c| |x - y| \leq |x - y|.$$

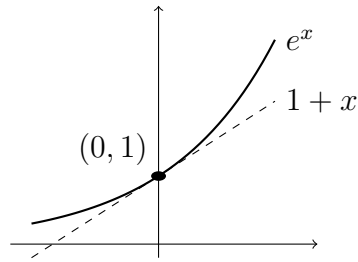
Exemple résolu – 2. Étudier un point stationnaire

Étudions $f(x) = x^3 - 3x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$. Les seuls points critiques sont -1 et 1 .
2. Le signe de la dérivée est positif sur $] - \infty; -1[$, négatif sur $] - 1; 1[$, puis positif sur $]1; +\infty[$. La fonction croît, décroît, puis croît.
3. Conclure que $f(-1) = 2$ est un maximum local et $f(1) = -2$ un minimum local. Ils ne sont pas globaux sur $\mathbb{R}$, puisque les limites aux deux infinis sont infinies de signes opposés.

L'annulation de la dérivée produit des candidats ; le changement de signe permet la classification.

Une courbe convexe et sa tangente



L'exponentielle reste au-dessus de sa tangente en zéro. Cette position découle de la convexité sur tout $\mathbb{R}$; elle exprime une inégalité globale et non une simple approximation près de zéro.

À retenir – Bilan

Les hypothèses de continuité sur le segment et de dérivabilité à l'intérieur rendent les accroissements finis applicables. Pour une étude de fonction, séparer domaine, dérivée, signe et conclusion ; pour un extremum global, examiner aussi les bornes et les limites.
