

Chapitre 07 – Cours

Fonctions usuelles et réciproques

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Maîtriser domaines et dérivées usuelles
- Définir une puissance réelle
- Interpréter les fonctions trigonométriques réciproques

1. Exponentielle et logarithme

L'exponentielle est strictement positive, dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et vérifie $e^{a+b} = e^a e^b$.

Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$.

Sa réciproque est le logarithme népérien, défini seulement sur les réels strictement positifs.

On a $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour $a, b > 0$ et $(\ln x)' = 1/x$.

Il n'existe pas de formule semblable transformant le logarithme d'une somme en somme de logarithmes.

2. Puissances réelles

Pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

La dérivée est $\alpha x^{\alpha-1}$.

Le domaine peut parfois être étendu, notamment pour les exposants entiers, mais cette extension doit être justifiée séparément.

Les croissances comparées usuelles sont $\ln x = o(x^\alpha)$ et $x^\alpha = o(e^x)$ en $+\infty$ pour $\alpha > 0$.

3. Fonctions circulaires réciproques

Le sinus restreint à $[-\pi/2; \pi/2]$ est bijectif sur $[-1; 1]$; sa réciproque est $\arcsin$.

Le cosinus restreint à $[0; \pi]$ a pour réciproque $\arccos$.

La tangente est une bijection de $] -\pi/2; \pi/2[$ vers $\mathbb{R}$, de réciproque $\arctan$.

Ces restrictions expliquent pourquoi $\arcsin(\sin x)$ n'est pas toujours égal à x .

Les dérivées sont $1/\sqrt{1-x^2}$ pour arcsin, son opposé pour arccos, sur $] -1; 1[$; celle d'arctan est $1/(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$.

4. Fonctions hyperboliques

On définit $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ et $\tanh x = \sinh x / \cosh x$.

La première est paire, la deuxième impaire.

Leurs dérivées s'échangent, et $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Ces fonctions apparaissent notamment dans certaines équations différentielles.

5. Exemple et méthode

Pour dériver $f(x) = \ln(1+x^2)$, on commence par constater que $1+x^2 > 0$ pour tout réel.

Puis la dérivation composée donne $f'(x) = 2x/(1+x^2)$.

Le signe de cette expression permet d'obtenir les variations.

Toujours annoncer un domaine avant d'appliquer une identité ou une formule de dérivation ; plusieurs erreurs apparemment algébriques sont en réalité des oublis de domaine.

Une réciproque exige une restriction

Définition – Branche réciproque

Une fonction périodique ne peut pas être injective sur $\mathbb{R}$. Pour définir sa réciproque, on choisit un intervalle sur lequel elle est continue et strictement monotone. L'image de cet intervalle devient le domaine de la réciproque ; la branche choisie impose ses valeurs.

Propriété – Dériver une réciproque

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle, dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, sa réciproque est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Le point où l'on évalue la dérivée de la réciproque est l'image $f(a)$, non le point a . C'est ce changement de point qui explique le dénominateur des dérivées d'arcsinus et d'arccosinus.

Méthode – Contrôler une croissance comparée

En présence de x^α/e^x avec $\alpha > 0$ et $x \rightarrow +\infty$, le quotient tend vers zéro. Pour une expression contenant $\ln x$, commencer par vérifier $x > 0$, puis identifier précisément la puissance positive à laquelle on compare le logarithme.

Exemple résolu – 1. Résoudre une équation logarithmique

Résolvons $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln 3$ dans $\mathbb{R}$.

1. Les deux logarithmes imposent $x-1 > 0$ et $x+1 > 0$, donc $x > 1$. Ce domaine précède toute transformation.
2. Sur ce domaine, la somme vaut $\ln((x-1)(x+1))$. L'injectivité de $\ln$ donne $x^2-1 = 3$, donc $x = 2$ ou $x = -2$.
3. Seul 2 appartient au domaine. La substitution donne $\ln 1 + \ln 3 = \ln 3$, donc $\mathcal{S} = \{2\}$.

Le candidat -2 est éliminé parce que les logarithmes réels initiaux n'y existent pas.

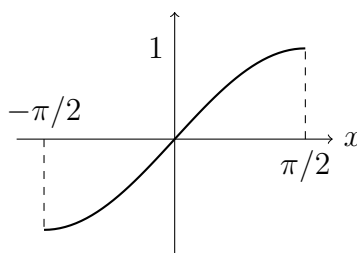
Exemple résolu – 2. Calculer une composition réciproque

Déterminons $\arcsin(\sin(5\pi/6))$, puis une primitive d'arctangente composée.

1. On a $\sin(5\pi/6) = 1/2$. La valeur de l'arcsinus doit appartenir à $[-\pi/2; \pi/2]$, d'où $\arcsin(1/2) = \pi/6$.
2. Pour $g(x) = \arctan(2x)$, la dérivation composée donne $g'(x) = 2/(1+4x^2)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Ainsi $G(x) = \frac{1}{2} \arctan(2x)$ est une primitive de $1/(1+4x^2)$ sur $\mathbb{R}$. Dériver G constitue une vérification immédiate, sans changement de domaine.

Les deux calculs mobilisent la définition de la réciproque et ses propriétés locales.

La branche principale du sinus



Sur cette restriction, chaque ordonnée de $[-1; 1]$ possède un unique antécédent. Lire l'abscisse en fonction de l'ordonnée définit l'arcsinus ; en dehors de la branche, la composition $\arcsin \circ \sin$ replie les angles.

À retenir – Bilan

Les identités du logarithme exigent des arguments strictement positifs. Les puissances réelles se définissent d'abord sur $]0; +\infty[$. Pour les fonctions réciproques, retenir ensemble le domaine, l'image et la dérivée : ces trois informations empêchent les simplifications abusives et fixent la branche utilisée.
