

Chapitre 08 – Cours

Intégration et primitives

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Calculer une intégrale définie
- Choisir parties ou substitution
- Relier intégrale, aire et primitive

1. Intégrale sur un segment

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment peut être construite à partir de sommes de rectangles.

Elle est orientée : $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Elle est linéaire et satisfait la relation de Chasles.

Si $f \geq 0$, son intégrale est positive ; si $f \leq g$, l'intégrale de f est inférieure à celle de g .

Ces propriétés permettent des encadrements même lorsqu'aucune primitive simple n'est connue.

2. Théorème fondamental

Pour f continue, la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable et $F' = f$.

Ainsi, si G est une primitive de f , $\int_a^b f = G(b) - G(a)$.

Deux primitives diffèrent d'une constante sur un intervalle.

Le choix du domaine est essentiel : une formule de primitive doit être utilisée là où elle est valide et où les fonctions considérées sont définies.

3. Intégration par parties

Pour u, v de classe C^1 , la règle du produit intégrée donne

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v.$$

On choisit de dériver le facteur qui se simplifie, souvent un polynôme ou un logarithme.

Pour $\int_0^1 x e^x dx$, le choix $u = x$ conduit à $[x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$.

4. Changement de variable

Une substitution remplace simultanément l'expression, la différentielle et les bornes.

Si φ est C^1 et si f est continue sur un intervalle contenant son image, $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$.

Une substitution mal choisie peut compliquer le calcul ; il faut reconnaître une composition et sa dérivée.

5. Aire, symétrie et contrôle

L'intégrale de f représente une aire signée ; l'aire géométrique utilise $|f|$ lorsque le graphe traverse l'axe.

Sur $[-a; a]$, une fonction impaire a une intégrale nulle ; une fonction paire donne deux fois l'intégrale sur $[0; a]$.

Avant de calculer, chercher ces symétries.

Après calcul, vérifier le signe, l'unité et un encadrement simple.

Pour une intégrale impropre, la convergence doit être étudiée avant de manipuler une borne infinie comme une borne finie.

Passer d'une somme à une aire

Définition – Sommes de Riemann

Si f est continue sur $[a; b]$ avec $a < b$, les rectangles à pas constant donnent

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(t) dt.$$

Le pas multiplie la somme : l'oublier change l'échelle et généralement la limite.

Propriété – Encadrer une intégrale

Si f est continue sur $[a; b]$, avec $a \leq b$, et $m \leq f(x) \leq M$ sur ce segment, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Cette estimation utilise la positivité et la linéarité de l'intégrale. Les bornes doivent être dans l'ordre annoncé ; les inverser change le signe de l'intégrale et impose d'adapter l'inégalité.

Méthode – Choisir une intégration par parties

Dans un produit, dériver un polynôme réduit son degré tandis qu'une exponentielle se primitive sans se compliquer. Écrire explicitement u , v' puis u' , v permet de vérifier la formule avant d'appliquer les bornes.

Exemple résolu – 1. Une substitution avec bornes

Calculons $I = \int_0^1 2x/(1+x^2) dx$.

1. L'intégrande est continue sur le segment, puisque $1+x^2$ reste strictement positif. La substitution $u = 1+x^2$ fournit $du = 2x dx$.
2. Transformer les bornes : $x = 0$ donne $u = 1$ et $x = 1$ donne $u = 2$. Il ne reste plus de variable x dans la nouvelle intégrale.
3. Prendre $\ln u$ comme primitive sur $[1; 2]$. Le résultat est positif, conformément au signe de l'intégrande.

$$I = \int_1^2 \frac{du}{u} = [\ln u]_1^2 = \ln 2.$$

La primitive directe $\ln(1+x^2)$ fournit le même contrôle.

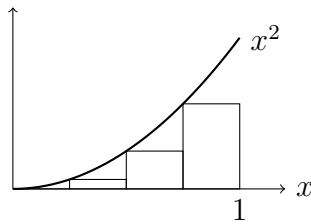
Exemple résolu – 2. Distinguer aire et intégrale

Calculons l'intégrale de $f(x) = x$ sur $[-1; 1]$, puis l'aire entre son graphe et l'axe.

1. La fonction est impaire et continue sur le segment symétrique. Son intégrale est donc nulle ; on retrouve $[x^2/2]_{-1}^1 = 0$.
2. L'aire utilise $|x|$, égal à $-x$ sur $[-1; 0]$ et à x sur $[0; 1]$. Il faut donc scinder au changement de signe.
3. Chaque triangle a une aire $1/2$. L'aire géométrique totale vaut 1, tandis que les contributions signées se compensent.

$$\int_{-1}^1 x dx = 0, \quad \int_{-1}^1 |x| dx = 1.$$

Des rectangles sous la courbe



Pour x^2 sur $[0; 1]$, les rectangles construits aux extrémités gauches restent sous la courbe, car la fonction est croissante. Leurs aires fournissent une minoration de l'intégrale ; leur somme converge vers $1/3$ lorsque le pas tend vers zéro.

À retenir – Bilan

Avant une technique de calcul, chercher signe, symétrie et encadrement. Une intégration par parties précise les deux fonctions choisies ; une substitution transforme expression, différentielle et bornes. Vérifier le résultat par dérivation lorsqu'une primitive explicite est obtenue.
