

Chapitre 09 – Cours

Équations différentielles linéaires

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Résoudre un problème de Cauchy
- Utiliser un facteur intégrant
- Traiter le second ordre à coefficients constants

1. Premier ordre

Une équation linéaire du premier ordre s'écrit $y' + a(x)y = b(x)$ sur un intervalle où les coefficients sont continus.

L'inconnue est une fonction dérivable.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $y' + ay = 0$ est formé des fonctions $Ce^{-A(x)}$, où A est une primitive de a .

Une condition initiale $y(x_0) = y_0$ détermine une unique constante.

2. Facteur intégrant

En multipliant par e^A , l'équation devient $(e^A y)' = be^A$.

On intègre pour obtenir

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(C + \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt \right).$$

Cette formule prouve existence et unicité sous les hypothèses annoncées.

La variation de la constante est une autre manière de retrouver le même calcul.

Les bornes et constantes doivent être cohérentes avec la donnée initiale.

3. Second ordre constant

Pour $y'' + ay' + by = 0$, on étudie $r^2 + ar + b$.

Avec deux racines réelles distinctes r_1, r_2 , on obtient $Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$.

Avec une racine double r , on obtient $(A + Bx)e^{rx}$.

Avec les racines complexes $\alpha \pm i\beta$, les solutions réelles sont $e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$.

Deux conditions initiales sont nécessaires.

4. Équation avec second membre

La somme d'une solution particulière et d'une solution homogène donne toutes les solutions.

Pour un second membre simple, on cherche une forme adaptée, en tenant compte d'une éventuelle résonance.

Par exemple $y' - y = e^x$ admet la particulière xe^x , et non une simple constante multipliée par e^x puisque cette dernière appartient déjà à l'espace homogène.

5. Exemple et interprétation

Pour $y' + 2y = 6$ et $y(0) = 1$, l'équilibre est 3 et $y = 3 - 2e^{-2x}$.

La solution tend vers 3 lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Le modèle possède un comportement stable : les écarts initiaux décroissent exponentiellement.

Après chaque résolution, dériver la réponse, la remplacer dans l'équation et contrôler les conditions initiales.

Cette vérification distingue une solution complète d'une formule simplement plausible.

Fixer le problème avant de résoudre

Définition – Problème de Cauchy

Un problème de Cauchy associe une équation différentielle et des valeurs initiales au même point. Pour une équation linéaire du premier ordre à coefficients continus sur un intervalle, une valeur $y(x_0)$ impose une unique solution sur cet intervalle. Au second ordre, on prescrit aussi $y'(x_0)$.

Propriété – Superposition avec un second membre

Si y_p est une solution particulière d'une équation linéaire, une fonction y en est solution si et seulement si $y - y_p$ résout l'équation homogène. On obtient cette équivalence en soustrayant les deux équations ; elle justifie l'expression « particulière plus homogène ».

L'ensemble des solutions avec second membre non nul n'est généralement pas un espace vectoriel.

Méthode – Vérifier un facteur intégrant

Choisir une primitive A du coefficient a , puis développer la dérivée du produit : $(e^A y)' = e^A(y' + ay)$. Comme l'exponentielle ne s'annule jamais, cette multiplication est réversible sur tout l'intervalle. Elle transforme donc l'équation sans perdre ni ajouter de solutions.

Exemple résolu – 1. Un premier ordre avec donnée initiale

Résolvons $y' + 2y = 4$, avec $y(0) = 1$, sur $\mathbb{R}$.

1. L'équation homogène $y' + 2y = 0$ a pour solutions Ce^{-2x} . Une solution particulière constante est $y_p = 2$, puisque $2 \times 2 = 4$.
2. Toutes les solutions sont donc $y(x) = 2 + Ce^{-2x}$. La condition initiale impose $1 = 2 + C$, d'où $C = -1$.
3. Vérifier : $y' = 2e^{-2x}$, donc $y' + 2y = 2e^{-2x} + 4 - 2e^{-2x} = 4$. La valeur en zéro vaut bien 1.

$$y(x) = 2 - e^{-2x}.$$

La solution croît vers l'état d'équilibre 2 ; ce comportement se lit aussi dans l'expression explicite.

Exemple résolu – 2. Une résonance au second ordre

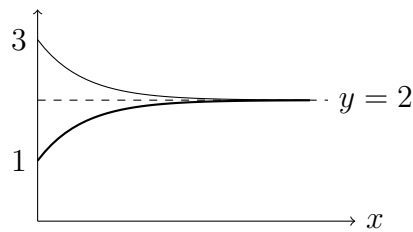
Résolvons $y'' + y = \cos x$, avec $y(0) = y'(0) = 0$.

1. Les solutions homogènes sont $A \cos x + B \sin x$. Chercher une particulière sous la forme $a \cos x + b \sin x$ échoue : toutes ces fonctions annulent le membre gauche.
2. Essayer $y_p = cx \sin x$. Deux dérivations donnent $y_p'' + y_p = 2c \cos x$, donc $c = 1/2$.
3. La solution générale vaut $A \cos x + B \sin x + (x/2) \sin x$. Les deux conditions imposent successivement $A = 0$ et $B = 0$.

$$y(x) = \frac{x}{2} \sin x.$$

Le facteur x est ici nécessaire pour sortir de l'espace des solutions homogènes.

Trajectoires vers un équilibre



Les deux courbes résolvent $y' + 2y = 4$ avec des valeurs initiales différentes. Leur écart à 2 décroît exponentiellement ; elles ne se croisent pas, conformément à l'unicité d'une solution passant par une donnée initiale.

À retenir – Bilan

Écrire l'intervalle et la régularité des coefficients. Déterminer d'abord les solutions homogènes, puis une particulière, avant d'imposer les données initiales. Une substitution dans l'équation contrôle les dérivées et les signes ; la vérification des conditions initiales contrôle les constantes.
