

Chapitre 10 – Cours

Comparaisons asymptotiques et développements limités

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Employer équivalents et petits o
- Calculer un DL au bon ordre
- Traiter une annulation sans perdre le terme dominant

1. Comparer près d'un point

L'écriture $f = o(g)$ signifie que f/g tend vers zéro, lorsque le quotient est défini dans un voisinage adapté.

L'équivalence $f \sim g$ signifie que $f/g \rightarrow 1$.

Un équivalent permet de remplacer un facteur dans un produit ou un quotient, mais pas librement dans une différence : si deux termes dominants s'annulent, il faut connaître l'ordre suivant. $f = O(g)$ indique que le quotient est borné localement.

2. Développement limité

Un DL d'ordre n en zéro est une écriture $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$.

La formule de Taylor-Young affirme que si f est de classe C^n sur un voisinage de zéro, les coefficients sont $f^{(k)}(0)/k!$.

Le DL est une approximation locale avec un reste contrôlé asymptotiquement, pas une égalité polynomiale exacte.

3. Formules fondamentales

Il faut connaître les DL de e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ et $1/(1-x)$.

Par exemple,

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2).$$

La parité fournit un contrôle utile : le sinus ne comporte que des puissances impaires, le cosinus des puissances paires.

4. Opérations

On peut additionner et multiplier des DL en conservant seulement les degrés nécessaires.

Pour une composition, la quantité substituée doit tendre vers le point du développement.

Pour un quotient, on peut factoriser le terme dominant du dénominateur puis utiliser le DL de l'inverse.

Il faut choisir l'ordre en fonction des annulations prévues ; un calcul à un ordre trop faible ne permet pas de conclure.

5. Exemple résolu

Pour calculer $(e^x - 1 - x)/x^2$, le simple équivalent $e^x \sim 1$ est inutile.

Le DL d'ordre 2 donne $e^x - 1 - x = x^2/2 + o(x^2)$: la limite du quotient est $1/2$.

Un DL peut également préciser la position d'une courbe par rapport à une tangente : le signe du premier terme non nul après le terme affine donne la position locale.

Le remplacement $x = 1/n$ transforme enfin de nombreux problèmes de suites en calculs locaux de fonctions.

Donner un sens exact au reste

Définition – Petit o sans quotient ambigu

Au voisinage de zéro, $r(x) = o(x^n)$ signifie qu'on peut écrire $r(x) = x^n \varepsilon(x)$ pour $x \neq 0$, avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$. Un développement limité décrit donc le reste après soustraction du polynôme. Ce reste n'est pas nécessairement nul, ni de signe constant.

Propriété – Une hypothèse suffisante pour Taylor–Young

Si f est de classe C^n dans un voisinage de a , alors

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

Cette hypothèse simple est suffisante ; on n'a pas besoin ici de rechercher les hypothèses minimales du théorème.

Propriété – Équivalent et signe

Si $f \sim g$ près du point étudié et si g ne s'annule pas dans un voisinage épointé, alors $f/g \rightarrow 1$. Ce quotient est donc strictement positif assez près du point : f et g ont le même signe localement. Cette conclusion est locale et ne décrit pas nécessairement le signe sur tout le domaine.

Exemple résolu – 1. Choisir un ordre après annulation

Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - x)/x^3$.

1. Le terme x sera soustrait ; un DL d'ordre un ne donnera qu'un reste $o(x)$, insuffisant après division par x^3 .
2. Utiliser $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$. Soustraire exactement x fait apparaître le premier terme non nul du numérateur.
3. Diviser par x^3 pour $x \neq 0$; le reste devient $o(1)$, qui tend vers zéro.

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1) \rightarrow -\frac{1}{6}.$$

Exemple résolu – 2. Composer puis multiplier

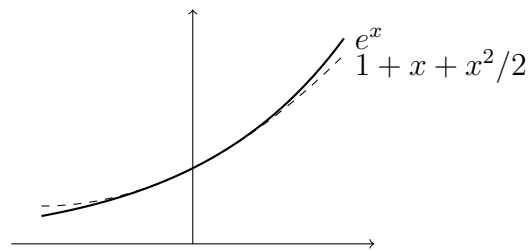
Développons e^{x+x^2} à l'ordre deux en zéro.

1. Poser $u = x + x^2$, qui tend vers zéro. Le DL de l'exponentielle donne $e^u = 1 + u + u^2/2 + o(u^2)$.
2. Comme $u/x \rightarrow 1$, le reste $o(u^2)$ est aussi $o(x^2)$. De plus $u^2 = x^2 + o(x^2)$: les termes de degré trois et quatre sont absorbés par le reste.
3. Regrouper les coefficients de même degré, sans conserver de précision injustifiée.

$$e^{x+x^2} = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

La différence avec la tangente $1 + x$ est positive pour x non nul assez proche de zéro.

Approximer localement



L'approximation quadratique et l'exponentielle ont mêmes valeur, pente et courbure en zéro. Leur proximité est locale : le reste $o(x^2)$ ne fournit pas à lui seul une borne numérique valable loin du point de développement.

À retenir – Bilan

Le point, l'ordre et le reste font partie du résultat. Anticiper les annulations avant de choisir l'ordre, vérifier que la variable composée tend vers le bon point, puis ramener tous les restes à une même échelle. On additionne des DL ; on ne soustrait pas des équivalents sans analyser les termes suivants.
