Chapitre 12 – Cours

Matrices et systèmes linéaires

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Effectuer des produits matriciels
- Appliquer le pivot de Gauss
- Relier rang, noyau et solutions

1. Matrices et opérations

Une matrice à p lignes et n colonnes représente notamment un tableau de coefficients ou une application linéaire une fois des bases choisies.

L'addition est coordonnée par coordonnée.

Le produit AB exige que le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B ; son coefficient (i, j) est $\sum_k a_{ik} b_{kj}$.

La multiplication est associative mais généralement non commutative.

2. Systèmes

Un système linéaire s'écrit $AX = B$.

Les opérations élémentaires sur les lignes correspondent à remplacer une équation par une combinaison qui préserve l'ensemble des solutions : échanger deux lignes, multiplier une ligne par un scalaire non nul, ajouter un multiple d'une autre ligne.

Le pivot de Gauss réduit le système à une forme échelonnée.

Une ligne $0 = \beta$ avec $\beta \neq 0$ prouve l'incompatibilité.

Si le système est compatible, les inconnues sans pivot sont libres ; les autres s'expriment en fonction d'elles.

Il faut distinguer absence de solution, solution unique et infinité de solutions.

3. Inversibilité

Une matrice carrée A est inversible s'il existe B tel que $AB = BA = I$.

L'inverse est unique.

Pour le calculer, on peut appliquer Gauss au tableau $(A \mid I)$: si le bloc gauche se transforme en I, le bloc droit devient A^{-1}.

Si A est inversible, le système $AX = B$ possède l'unique solution $A^{-1}B$ pour toute colonne B.

4. Rang et noyau

Le rang est le nombre de pivots, également la dimension de l'espace engendré par les colonnes.

Le noyau est l'ensemble des solutions de $AX = 0$.

Ce système homogène est toujours compatible, car $X = 0$ convient.

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son rang est maximal, ou si son noyau est réduit à zéro.

5. Exemple et précautions

Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A = I + N$ où $N^2 = 0$.

Le binôme donne $A^n = I + nN$; cette formule est permise parce que I et N commutent.

Le développement naïf $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ est faux sans commutation : le terme correct est $AB + BA$.

Lors d'un calcul, contrôler les dimensions avant les coefficients évite de nombreuses erreurs.

Lire les dimensions avant les coefficients

Définition – Matrice d'un système

Pour $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathbb{K}^n$, la colonne $AX \in \mathbb{K}^p$ contient les membres gauches de p équations à n inconnues. Une solution de $AX = B$ est une colonne satisfaisant simultanément toutes les équations, et non une équation choisie isolément.

Propriété – Toutes les solutions d'un système compatible

Si X_0 satisfait $AX_0 = B$, alors

$$AX = B \quad \Longleftrightarrow \quad X = X_0 + H, \quad H \in \ker A.$$

Il suffit de soustraire $AX_0 = B$ à l'équation. L'ensemble des solutions est ainsi un translaté du noyau ; sa dimension est le nombre de paramètres libres. Pour $B \neq 0$, cet ensemble ne contient pas zéro et n'est pas un sous-espace.

Exemple résolu – 1. Un système avec paramètre

Résolvons $x + y = 1$, $2x + 2y = t$, selon $t \in \mathbb{R}$.

1. Former le tableau augmenté, puis remplacer la deuxième ligne par elle-même moins deux fois la première. Cette opération est réversible et préserve les solutions.
2. Le système devient $x+y = 1$, $0 = t-2$. Si $t \neq 2$, la deuxième équation est impossible : il n'y a aucune solution.
3. Si $t = 2$, choisir $y = s \in \mathbb{R}$ comme inconnue libre. La première ligne impose alors $x = 1 - s$.

$$t = 2 : \quad \mathcal{S} = \{(1 - s, s) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Un rang inférieur au nombre d'inconnues ne signifie donc pas automatiquement incompatibilité.

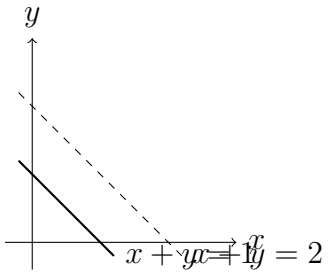
Exemple résolu – 2. Calculer puis vérifier un inverse

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Cherchons la solution de $AX = (5, 7)^T$.

1. Dans $(A \mid I)$, faire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, puis $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$. Le bloc gauche devient I.
2. Le bloc droit devient $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Multiplier avec A donne bien I, ce qui vérifie l'inverse.
3. Appliquer cet inverse au second membre : $X = (15 - 14, -5 + 7)^T = (1, 2)^T$. La substitution donne $1 + 4 = 5$ et $1 + 6 = 7$.

Les deux vérifications contrôlent séparément la matrice inverse et le calcul de la solution.

Compatibilité géométrique



Deux lignes proportionnelles de coefficients décrivent des droites parallèles. Elles sont confondues si les seconds membres ont la même proportion ; sinon elles sont disjointes. Cela représente les deux cas du premier exemple, avec $t = 2$ ou $t = 4$.

À retenir – Bilan

Le pivot traite ensemble coefficients et second membre. Après réduction, identifier les contradictions, puis les variables libres. Pour une matrice carrée, un pivot dans chaque colonne caractérise l'inversibilité ; pour une matrice rectangulaire, parler d'abord de rang, de noyau et de compatibilité.