Chapitre 13 – Exercices

Espaces vectoriels et dimension

20 exercices progressifs

Exercice 1 – Sous-espace

Montrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1x\}$ est un sous-espace et en donner une base.

Exercice 2 – Sous-espace

Montrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$ est un sous-espace et en donner une base.

Exercice 3 – Sous-espace

Montrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\}$ est un sous-espace et en donner une base.

Exercice 4 – Famille libre

Les vecteurs $(1, 1)$ et $(0, 1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5 – Famille libre

Les vecteurs $(1, 2)$ et $(0, 1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6 – Famille libre

Les vecteurs $(1, 3)$ et $(0, 1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7 – Coordonnées

Exprimer $(3, 5)$ dans la base $((1, 1), (0, 1))$.

Exercice 8 – Coordonnées

Exprimer $(3, 8)$ dans la base $((1, 2), (0, 1))$.

Exercice 9 – Coordonnées

Exprimer $(3, 11)$ dans la base $((1, 3), (0, 1))$.

Exercice 10 – Hyperplan

Déterminer une base de $F = \{(x, y, z) : x + 1y + z = 0\}$.

Exercice 11 – Hyperplan

Déterminer une base de $F = \{(x, y, z) : x + 2y + z = 0\}$.

Exercice 12 – Hyperplan

Déterminer une base de $F = \{(x, y, z) : x + 4y + z = 0\}$.

Exercice 13 – Polynômes

Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 14 – Polynômes

Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 15 – Polynômes

Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 16 – Approfondissement : somme directe

Montrer que $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(1, 1) \oplus \text{Vect}(1, -1)$.

Exercice 17 – Approfondissement : réunion

La réunion de deux sous-espaces est-elle toujours un sous-espace ?

Exercice 18 – Approfondissement : dimension

Dans $\mathbb{R}^3$, deux plans vectoriels peuvent-ils avoir une intersection réduite à zéro ?

Exercice 19 – Approfondissement : compléter une base

Compléter $u = (1, 1, 0)$ et $v = (0, 1, 1)$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20 – Approfondissement : espace de fonctions

Montrer que les fonctions $1, x, x^2$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.