

Chapitre 16 – Exercices

Espaces euclidiens et projections

20 exercices progressifs

Exercice 1 – Produit scalaire

Calculer le produit scalaire de $u = (1, 1, -1)$ et $v = (1, 1, 2)$. Sont-ils orthogonaux ?

Exercice 2 – Produit scalaire

Calculer le produit scalaire de $u = (1, 2, -1)$ et $v = (2, 1, 2)$. Sont-ils orthogonaux ?

Exercice 3 – Produit scalaire

Calculer le produit scalaire de $u = (1, 3, -1)$ et $v = (3, 1, 2)$. Sont-ils orthogonaux ?

Exercice 4 – Projection sur une droite

Projeter $x = (1, 1)$ orthogonalement sur la droite engendrée par $u = (1, 1)$.

Exercice 5 – Projection sur une droite

Projeter $x = (2, 1)$ orthogonalement sur la droite engendrée par $u = (1, 1)$.

Exercice 6 – Projection sur une droite

Projeter $x = (3, 1)$ orthogonalement sur la droite engendrée par $u = (1, 1)$.

Exercice 7 – Distance à un plan

Calculer la distance de $A = (0, 0, 1)$ au plan $x + y + z = 0$.

Exercice 8 – Distance à un plan

Calculer la distance de $A = (0, 0, 2)$ au plan $x + y + z = 0$.

Exercice 9 – Distance à un plan

Calculer la distance de $A = (0, 0, 4)$ au plan $x + y + z = 0$.

Exercice 10 – Norme et normalisation

Normaliser $u = (31, 41)$.

Exercice 11 – Norme et normalisation

Normaliser $u = (32, 42)$.

Exercice 12 – Norme et normalisation

Normaliser $u = (33, 43)$.

Exercice 13 – Produit scalaire intégral

Calculer $\langle 1, x \rangle = \int_0^1 x \, dx$ et les normes de 1 et de x pour ce produit scalaire.

Exercice 14 – Produit scalaire intégral

Calculer $\langle 1, x \rangle = \int_0^2 x \, dx$ et les normes de 1 et de x pour ce produit scalaire.

Exercice 15 – Produit scalaire intégral

Calculer $\langle 1, x \rangle = \int_0^3 x \, dx$ et les normes de 1 et de x pour ce produit scalaire.

Exercice 16 – Approfondissement : Gram-Schmidt

Orthonormaliser $(1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$ dans cet ordre.

Exercice 17 – Approfondissement : Cauchy-Schwarz

Prouver $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.

Exercice 18 – Approfondissement : distance minimale

Pourquoi le projeté orthogonal p de x sur F est-il le point de F le plus proche de x ?

Exercice 19 – Approfondissement : base orthonormée

Pour une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$, exprimer les coordonnées et la norme d'un vecteur x .

Exercice 20 – Approfondissement : polynômes orthogonaux

Pour $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 PQ$, montrer que 1 et X sont orthogonaux, puis trouver un polynôme unitaire de degré deux orthogonal aux deux.