

Chapitre 17 – Cours

Dénombrement et combinatoire

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Choisir le bon modèle de comptage
- Distinguer ordre et répétition
- Démontrer une identité combinatoire

1. Principes de comptage

Le principe additif concerne des cas disjoints : on additionne leurs effectifs.

Le principe multiplicatif concerne des choix successifs : on multiplie les nombres de possibilités.

Avant tout calcul, préciser si l'ordre compte et si les répétitions sont autorisées.

Ces deux décisions différencient les modèles les plus fréquents.

2. Listes et permutations

Une liste de longueur k sur un ensemble de n éléments possède n^k possibilités lorsque les répétitions sont autorisées.

Sans répétition, pour $k \leq n$, le nombre vaut $n(n-1) \cdots (n-k+1) = n!/(n-k)!$.

Une permutation est une liste de tous les éléments sans répétition, donc il y en a $n!$.

La convention $0! = 1$ permet d'inclure le cas vide.

3. Parties

Une partie de cardinal k ne comporte pas d'ordre.

Chaque choix apparaît $k!$ fois parmi les listes sans répétition ; le nombre de parties est donc $\binom{n}{k} = n!/[k!(n-k)!]$.

La symétrie entre une partie et son complément donne $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Chaque élément peut être choisi ou non : l'ensemble des parties a cardinal 2^n .

4. Identités

La relation de Pascal se démontre en distinguant les parties qui contiennent un élément fixé et celles qui ne le contiennent pas.

En sommant selon le cardinal, on obtient $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Le binôme de Newton exprime la même décomposition en développant $(a + b)^n$.

Une preuve par double comptage décrit un même ensemble de deux façons, puis égalise les deux résultats.

5. Exemples et pièges

Former un comité de trois personnes parmi dix donne $\binom{10}{3} = 120$.

Attribuer trois postes distincts à ces personnes donne au contraire $10 \times 9 \times 8 = 720$.

Les anagrammes avec lettres répétées demandent de diviser par les permutations des lettres indistinguables.

Compter un complémentaire est parfois plus simple que compter directement les configurations désirées, à condition d'identifier exactement l'univers.

Une formule de dénombrement doit toujours être accompagnée d'une description de ce qui est compté.

Identifier précisément l'objet compté

Définition – Liste et partie

Une liste conserve l'ordre de ses éléments : (a, b) et (b, a) sont généralement distinctes. Une partie oublie l'ordre et ne répète pas ses éléments. Les coefficients $\binom{n}{k}$ comptent donc des parties, tandis que les puissances n^k comptent des listes avec répétition autorisée.

Exemple résolu – 1. Choisir un comité avec une contrainte

Parmi six femmes et quatre hommes, comptons les comités de trois personnes comprenant au moins une femme.

1. L'objet est une partie de trois personnes : ni l'ordre ni une répétition ne sont autorisés. Sans contrainte, il existe $\binom{10}{3} = 120$ comités.
2. Le complémentaire comprend uniquement les comités de trois hommes. Ils sont au nombre de $\binom{4}{3} = 4$.

3. Soustraire les cas exclus donne $120 - 4 = 116$. Les deux catégories sont disjointes et couvrent tous les comités.

$$N = \binom{10}{3} - \binom{4}{3} = 116.$$

Le comptage direct par une, deux ou trois femmes donnerait le même résultat, avec davantage de calculs.

Exemple résolu – 2. Compter des mots avec répétitions

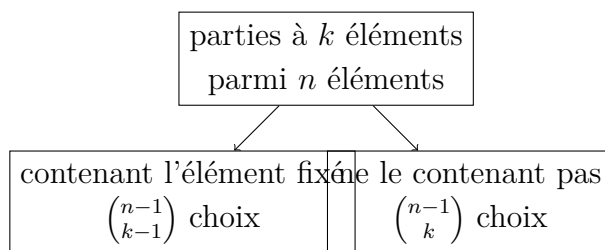
Comptons les anagrammes du mot ANANAS.

1. Il y a six positions, trois lettres A, deux lettres N et une lettre S. Si toutes les lettres portaient une étiquette distincte, on aurait $6!$ arrangements.
2. Effacer les étiquettes ne change pas un mot lorsqu'on permute les trois A ou les deux N. Chaque mot a donc été compté exactement $3!2!$ fois.
3. Diviser donne $6!/(3!2!) = 60$. Autre contrôle : choisir les trois positions des A, puis deux des trois positions restantes pour les N.

$$\binom{6}{3} \binom{3}{2} = 20 \times 3 = 60.$$

Les deux descriptions comptent exactement le même ensemble de mots.

La relation de Pascal par séparation



Les deux branches sont disjointes : une partie contient l'élément fixé ou ne le contient pas. Pour $1 \leq k \leq n-1$, leur addition prouve $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$; les cas extrêmes se vérifient directement.

À retenir – Bilan

Avant la formule, décrire une issue. Vérifier ordre, répétition et éventuelles contraintes ; lorsqu'on divise un comptage, expliquer pourquoi chaque objet a été compté exactement le même nombre de fois. Une partition en cas disjoints ou le passage au complémentaire simplifie souvent un problème compliqué.