

Chapitre 19 – Cours

Séries numériques et sommation

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Distinguer suite et série
- Utiliser comparaison et équivalents
- Calculer une somme et contrôler un reste

1. Définition

Une série $\sum u_n$ est étudiée par ses sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$.

Elle converge si cette suite admet une limite finie, appelée somme de la série.

La convergence implique $u_n \rightarrow 0$, puisque $u_n = S_n - S_{n-1}$.

La réciproque est fausse : la série harmonique diverge.

Il faut distinguer le terme général, la somme partielle et la somme totale.

2. Séries positives

Pour $u_n \geq 0$, les sommes partielles sont croissantes ; la convergence équivaut donc à leur majoration.

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un rang et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Des termes positifs équivalents donnent des séries de même nature.

Une comparaison ne calcule pas automatiquement la somme.

3. Références

La série géométrique de raison q converge si et seulement si $|q| < 1$, avec somme $1/(1 - q)$ lorsqu'elle commence au rang zéro.

La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} 1/n^\alpha$ converge exactement pour $\alpha > 1$.

La comparaison aux intégrales de fonctions positives décroissantes permet de retrouver ce seuil et de contrôler les restes.

4. Signes et sommabilité

Une série est absolument convergente si $\sum |u_n|$ converge.

Cela entraîne sa convergence, pour des termes réels ou complexes.

Une majoration $|u_n| \leq Cv_n$ par une série positive convergente suffit.

En première année PCSI, la théorie de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme ; on privilégie les techniques de convergence absolue explicitement prévues.

5. Télescopage et reste

Le télescopage exploite une écriture $u_n = v_n - v_{n+1}$.

Ainsi $1/[n(n+1)] = 1/n - 1/(n+1)$, et la somme de rang un à N vaut $1 - 1/(N+1)$.

La somme totale est 1 ; le reste est précisément $1/(N+1)$.

Pour annoncer une approximation numérique, on doit fournir un contrôle du reste et pas seulement une valeur obtenue par troncature.

Les procédés sommatoires discrets de MPSI prolongent ces idées par des familles sommables et des échanges de sommes dans les cadres autorisés.

La somme est une limite

Définition – Reste d'une série convergente

Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S$, son reste après le rang N est $R_N = S - S_N$. On a toujours $R_N \rightarrow 0$, mais sa vitesse dépend de la série. Pour une approximation, l'erreur est $|R_N|$; le seul nombre de termes calculés ne constitue pas une certification.

Propriété – Comparer avec une intégrale

Si f est positive, continue et décroissante sur $[N; +\infty[$, chaque rectangle de hauteur $f(n)$ et de largeur 1 est sous la courbe sur $[n-1; n]$. Par addition puis passage à la limite, lorsque l'intégrale converge,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^{\infty} f(x) dx.$$

La décroissance justifie le sens de l'inégalité ; une simple positivité ne suffit pas.

Exemple résolu – 1. Une somme géométrique avec précision

Approchons $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$ avec une erreur au plus 10^{-3} .

1. La raison $q = 1/3$ vérifie $|q| < 1$. La série converge et sa somme vaut $S = 1/(1 - 1/3) = 3/2$.
2. Après le rang N , le reste est encore géométrique : $R_N = 3^{-(N+1)}/(1-1/3) = 1/(2 \cdot 3^N)$.
3. Il faut $3^N \geq 500$. Comme $3^5 = 243$ et $3^6 = 729$, le premier rang convenable est $N = 6$, soit sept termes à partir du rang zéro.

La positivité des termes donne en outre $S_N \leq S$: la troncature sous-estime la somme.

Exemple résolu – 2. Comparer sans calculer la somme

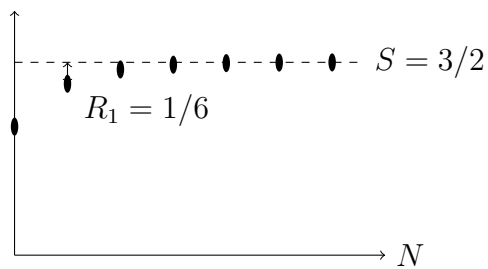
Étudions $\sum_{n \geq 1} 1/(n^2 + n + 1)$.

1. Les termes sont positifs. Comme $n^2 + n + 1 \geq n^2$, ils sont majorés par $1/n^2$.
2. La série de Riemann d'exposant deux converge. Le théorème de comparaison établit donc la convergence de la série proposée, sans identifier sa somme.
3. Pour $N \geq 1$, son reste est majoré par $\sum_{n=N+1}^{\infty} 1/n^2$. La décroissance de $x \mapsto 1/x^2$ donne une borne intégrale.

$$0 \leq R_N \leq \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{N}.$$

Cette majoration est simple et certifiée, même si elle n'est pas optimale.

Sommes partielles et somme totale



Les sommes partielles de la série géométrique croissent vers la droite horizontale. La distance verticale restante représente R_N , et non le terme u_N ; confondre les deux change le contrôle de l'erreur.

À retenir – Bilan

Commencer par le terme général et son signe. S'il ne tend pas vers zéro, la série diverge ; sinon, choisir un critère adapté. Pour les termes positifs, comparer à une référence connue. Pour une approximation, ajouter un contrôle explicite du reste et préciser le rang initial de la somme.
