Chapitre 20 – Cours

Fonctions de deux variables : initiation CPGE

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Calculer des dérivées partielles
- Appliquer la règle de la chaîne
- Interpréter gradient et courbes de niveau

1. Domaine et représentation

Une fonction de deux variables associe un réel à un couple (x, y) appartenant à une partie de $\mathbb{R}^2$.

Son graphe est une surface dans l'espace.

Les courbes de niveau sont les ensembles $f(x, y) = c$, utiles pour représenter une altitude ou une température.

Le domaine doit être contrôlé avant tout calcul : un dénominateur non nul ou une quantité positive peuvent imposer des restrictions.

2. Voisinages et continuité

La distance euclidienne définit des boules.

Une partie est ouverte si chaque point possède une boule entièrement contenue dans cette partie.

La continuité en un point signifie que $f(x, y)$ tend vers sa valeur lorsque le couple tend vers ce point, par n'importe quel chemin.

Tester deux chemins différents peut réfuter une limite, mais vérifier seulement quelques chemins ne démontre pas son existence.

3. Dérivées partielles

La dérivée partielle selon x fait varier x en gardant y fixé ; l'autre fait l'inverse.

Leur existence seule ne suffit pas à toutes les bonnes propriétés du calcul différentiel.

Si les dérivées partielles sont continues dans un voisinage, la fonction est de classe C^1 et admet une approximation affine avec reste négligeable devant la distance au point.

4. Chaîne et gradient

Le gradient est $\nabla f = (\partial_x f, \partial_y f)$.

Pour une trajectoire dérivable $(x(t), y(t))$ dans le domaine d'une fonction C^1,

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \partial_x f \, x'(t) + \partial_y f \, y'(t).$$

Le gradient est orthogonal aux courbes de niveau régulières.

Le différentiel fournit l'approximation $f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + h\partial_x f(a,b) + k\partial_y f(a,b)$.

5. Extrema et portée

Un extremum intérieur d'une fonction différentiable est un point critique, mais la réciproque échoue : $x^2 - y^2$ possède un point selle en zéro.

Pour prouver un minimum global, une écriture en somme de carrés peut suffire.

Ce chapitre correspond au prolongement pratique prévu en MPSI et PCSI.

Il ne doit pas être présenté comme une exigence de toutes les L1 : l'exemple de programme L1 retenu ne comporte pas nécessairement cette unité dès la première année.

La théorie générale des fonctions de plusieurs variables dépasse ici l'objectif d'initiation.

Préciser le cadre différentiel

Définition – Différentiabilité et gradient

Sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f est différentiable en (a,b) si

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + Ah + Bk + o\Big(\sqrt{h^2+k^2}\Big).$$

Alors $A = \partial_x f(a,b)$ et $B = \partial_y f(a,b)$. La continuité des dérivées partielles dans un voisinage est une condition suffisante, plus forte que leur simple existence au point.

Propriété – Dériver le long d'une courbe de niveau

Si f est C^1 et si une courbe dérivable $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ reste dans un même niveau, alors $f(\gamma(t))$ est constante. La règle de la chaîne donne $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$. Lorsque le vecteur tangent est non nul et le gradient non nul, cette égalité exprime leur orthogonalité.

Exemple résolu – 1. Une limite qui dépend du chemin

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, posons $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$.

1. Le dénominateur est strictement positif hors de l'origine. La question est de savoir si une limite permet de prolonger la fonction continûment en zéro.
2. Sur le chemin $y = 0$, on obtient $f(x, 0) = 0$. Une limite éventuelle devrait donc valoir zéro.
3. Sur le chemin $y = x$ avec $x \neq 0$, on obtient $f(x, x) = 1/2$. Les deux chemins tendent vers le même point mais donnent des valeurs limites différentes.

La limite n'existe pas. Aucun choix de $f(0, 0)$ ne peut rendre la fonction continue à l'origine.

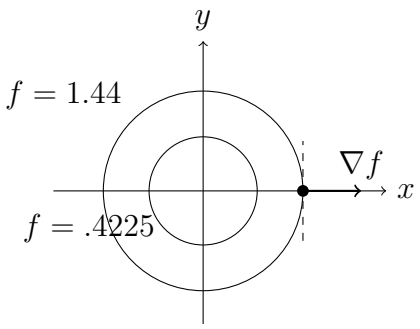
Exemple résolu – 2. Trouver un minimum sans critère supplémentaire

Étudions $g(x, y) = (x - 1)^2 + 2(y + 1)^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. La fonction est polynomiale, donc de classe C^1. Son gradient est $(2(x - 1), 4(y + 1))$ et ne s'annule qu'en $(1, -1)$.
2. La recherche de points critiques donne seulement un candidat. Ici la somme de carrés prouve directement $g(x, y) \geq 0$ pour tout couple.
3. L'égalité impose simultanément $x = 1$ et $y = -1$. Le point critique est donc l'unique minimum global, de valeur zéro.

Le même raisonnement n'est pas disponible pour $x^2 - y^2$, dont les valeurs changent de signe arbitrairement près de zéro.

Niveaux et direction du gradient



Pour $f(x, y) = x^2 + y^2$, les niveaux positifs sont des cercles. Au point $(1.2, 0)$, le gradient $(2.4, 0)$ est horizontal et la tangente au cercle verticale : leur orthogonalité est visible et exacte.

À retenir – Bilan

En deux variables, une limite doit convenir à tous les chemins. Les dérivées partielles se calculent séparément, mais une approximation affine demande une différentiabilité justifiée. L'annulation du gradient est une condition nécessaire pour un extremum intérieur différentiable ; la preuve d'un minimum exige un argument supplémentaire.