Chapitre 01 – Corrections

Logique, ensembles et applications

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Quantificateurs

Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 2$. Elle est vraie avec $x = 0$; l'énoncé initial est donc faux. On échange les quantificateurs et on nie le prédicat.

Exercice 2 – Quantificateurs

Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 3$. Elle est vraie avec $x = 0$; l'énoncé initial est donc faux. On échange les quantificateurs et on nie le prédicat.

Exercice 3 – Quantificateurs

Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 5$. Elle est vraie avec $x = 0$; l'énoncé initial est donc faux. On échange les quantificateurs et on nie le prédicat.

Exercice 4 – Image réciproque

La condition $1 \leq x^2 \leq 9$ équivaut à $1 \leq |x| \leq 3$. Donc l'image réciproque est $[-3;-1] \cup [1;3]$. Il ne s'agit pas ici d'une fonction réciproque.

Exercice 5 – Image réciproque

La condition $4 \leq x^2 \leq 16$ équivaut à $2 \leq |x| \leq 4$. Donc l'image réciproque est $[-4;-2] \cup [2;4]$. Il ne s'agit pas ici d'une fonction réciproque.

Exercice 6 – Image réciproque

La condition $16 \leq x^2 \leq 36$ équivaut à $4 \leq |x| \leq 6$. Donc l'image réciproque est $[-6;-4] \cup [4;6]$. Il ne s'agit pas ici d'une fonction réciproque.

Exercice 7 – Bijection affine

Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = 2x - 1$ admet l'unique solution $x = (y+1)/2$. Cela établit simultanément injectivité et surjectivité. $f^{-1}(y) = (y+1)/2$.

Exercice 8 – Bijection affine

Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = 3x - 1$ admet l'unique solution $x = (y+1)/3$. Cela établit simultanément injectivité et surjectivité. $f^{-1}(y) = (y+1)/3$.

Exercice 9 – Bijection affine

Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = 5x - 1$ admet l'unique solution $x = (y+1)/5$. Cela établit simultanément injectivité et surjectivité. $f^{-1}(y) = (y+1)/5$.

Exercice 10 – Inclusion et contre-exemple

Aucune inclusion n'est vraie : $-2 \in A \setminus B$ et $3 \in B \setminus A$. $A \cap B = [0;2]$ et $A \cup B = [-2;3]$.

Exercice 11 – Inclusion et contre-exemple

Aucune inclusion n'est vraie : $-3 \in A \setminus B$ et $4 \in B \setminus A$. $A \cap B = [0;3]$ et $A \cup B = [-3;4]$.

Exercice 12 – Inclusion et contre-exemple

Aucune inclusion n'est vraie : $-4 \in A \setminus B$ et $5 \in B \setminus A$. $A \cap B = [0;4]$ et $A \cup B = [-4;5]$.

Exercice 13 – Composition

$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$, tandis que $(g \circ f)(x) = (2x+1)^2$. En 0, les valeurs sont égales, mais en 1 elles valent 3 et 9 : les fonctions ne sont pas égales.

Exercice 14 – Composition

$(f \circ g)(x) = 3x^2 + 1$, tandis que $(g \circ f)(x) = (3x+1)^2$. En 0, les valeurs sont égales, mais en 1 elles valent 4 et 16 : les fonctions ne sont pas égales.

Exercice 15 – Composition

$(f \circ g)(x) = 5x^2 + 1$, tandis que $(g \circ f)(x) = (5x+1)^2$. En 0, les valeurs sont égales, mais en 1 elles valent 6 et 36 : les fonctions ne sont pas égales.

Exercice 16 – Approfondissement : contraposition

Par contraposition, supposons n impair : $n = 2k+1$. Alors $n^2 = 4k(k+1)+1$ est impair. La contraposée est démontrée, donc l'implication initiale est vraie.

Exercice 17 – Approfondissement : récurrence

Pour $n = 1$, $1 = 1^2$. Si la propriété est vraie au rang n, ajouter $2n+1$ donne $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Initialisation et hérédité établissent le résultat.

Exercice 18 – Approfondissement : injectivité

Sur $\mathbb{R}$, non : $f(1) = f(-1)$. Sur les positifs, $x^2 = y^2$ donne $(x-y)(x+y) = 0$, donc $x = y$. Son image est $[0;+\infty[$; la restriction est donc une bijection de cet intervalle sur lui-même.

Exercice 19 – Approfondissement : lois de De Morgan

Un élément x appartient au membre gauche si et seulement si $x \in E$ et x n'est ni dans A ni dans B. Cela équivaut à appartenir simultanément aux deux complémentaires, donc au membre droit.

Exercice 20 – Approfondissement : analyse-synthèse

En remplaçant x par $-x$: $f(-x) + 2f(x) = -3x$. Deux fois la première relation moins la seconde donne $3f(-x) = 9x$, donc $f(-x) = 3x$ et $f(x) = -3x$. Réciproquement, $-3x + 2(3x) = 3x$: cette fonction convient et est unique.