

Chapitre 02 – Corrections

Sommes, produits et trigonométrie

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Somme arithmétique

La première somme vaut $5(5+1)/2 = 15$. Par linéarité, la seconde vaut $3 \times 15 + 2 \times 5 = 55$.

Exercice 2 – Somme arithmétique

La première somme vaut $10(10+1)/2 = 55$. Par linéarité, la seconde vaut $3 \times 55 + 2 \times 10 = 185$.

Exercice 3 – Somme arithmétique

La première somme vaut $20(20+1)/2 = 210$. Par linéarité, la seconde vaut $3 \times 210 + 2 \times 20 = 670$.

Exercice 4 – Somme géométrique

La raison $q = 2$ est différente de 1. La formule $(1 - q^{n+1})/(1 - q)$ donne $\boxed{63}$. Il y a bien 6 termes.

Exercice 5 – Somme géométrique

La raison $q = 3$ est différente de 1. La formule $(1 - q^{n+1})/(1 - q)$ donne $\boxed{121}$. Il y a bien 5 termes.

Exercice 6 – Somme géométrique

La raison $q = \frac{1}{2}$ est différente de 1. La formule $(1 - q^{n+1})/(1 - q)$ donne $\boxed{\frac{63}{32}}$. Il y a bien 6 termes.

Exercice 7 – Somme télescopique

Les termes intermédiaires s'annulent : la somme vaut $1 - 1/5 = \frac{4}{5}$. Écrire les trois premiers termes rend cette annulation visible.

Exercice 8 – Somme télescopique

Les termes intermédiaires s'annulent : la somme vaut $1 - 1/7 = \frac{6}{7}$. Écrire les trois premiers termes rend cette annulation visible.

Exercice 9 – Somme télescopique

Les termes intermédiaires s'annulent : la somme vaut $1 - 1/9 = \frac{8}{9}$. Écrire les trois premiers termes rend cette annulation visible.

Exercice 10 – Binôme

Le coefficient de x^k est $\binom{3}{k}$. Le développement est $1 + 3x + 3x^2 + 1x^3$. En prenant $x = 1$, la somme des coefficients vaut $2^3 = 8$.

Exercice 11 – Binôme

Le coefficient de x^k est $\binom{4}{k}$. Le développement est $1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 1x^4$. En prenant $x = 1$, la somme des coefficients vaut $2^4 = 16$.

Exercice 12 – Binôme

Le coefficient de x^k est $\binom{5}{k}$. Le développement est $1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + 1x^5$. En prenant $x = 1$, la somme des coefficients vaut $2^5 = 32$.

Exercice 13 – Trigonométrie

Les solutions sont $x = 2k\pi \pm \pi/2$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Le cosinus est pair et 2π -périodique ; ces deux propriétés expliquent les deux familles.

Exercice 14 – Trigonométrie

Les solutions sont $x = 2k\pi \pm \pi/3$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Le cosinus est pair et 2π -périodique ; ces deux propriétés expliquent les deux familles.

Exercice 15 – Trigonométrie

Les solutions sont $x = 2k\pi \pm \pi/4$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Le cosinus est pair et 2π -périodique ; ces deux propriétés expliquent les deux familles.

Exercice 16 – Approfondissement : produit télescopique

Chaque facteur vaut $(k-1)/k$. Le produit est $(1/2)(2/3) \cdots ((n-1)/n) = 1/n$. Les simplifications concernent un produit, pas une somme.

Exercice 17 – Approfondissement : somme double

Pour chaque i , la somme intérieure vaut $ni + n(n+1)/2$. En sommant en i , on trouve $n \cdot n(n+1)/2 + n \cdot n(n+1)/2 = n^2(n+1)$.

Exercice 18 – Approfondissement : identité binomiale

On choisit n éléments parmi deux groupes disjoints de n éléments. Si k viennent du premier, $n-k$ viennent du second : il y a $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ choix. La réunion de ces cas disjoints donne l'identité.

Exercice 19 – Approfondissement : linéariser

Les identités $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donnent $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ et $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.

Exercice 20 – Approfondissement : somme des carrés

La formule est vraie au rang 1. En ajoutant $(n+1)^2$ au résultat au rang n et en factorisant par $n+1$, on obtient $(n+1)(n+2)(2n+3)/6$, formule au rang suivant.