

Chapitre 02 – Cours

Sommes, produits et trigonométrie

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Manipuler sommes et produits finis
- Utiliser le binôme
- Transformer une expression trigonométrique

1. Sommes finies

Le symbole $\sum_{k=p}^n u_k$ désigne une somme dont l'indice est une variable muette.

Il faut toujours contrôler le nombre de termes : de p à n , il y en a $n - p + 1$.

La linéarité autorise à séparer les sommes et à sortir un facteur constant.

Un changement d'indice exige de transformer aussi les bornes.

En revanche, le produit de deux sommes ne se réduit pas à la somme des produits de même indice : il faut une somme double.

Les formules fondamentales sont

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

Si $q = 1$, la seconde somme vaut $n + 1$.

Une somme télescopique $\sum_{k=p}^n (v_{k+1} - v_k)$ vaut $v_{n+1} - v_p$.

2. Produits et coefficients binomiaux

La factorielle $n! = 1 \times \cdots \times n$ avec $0! = 1$ intervient dans $\binom{n}{k} = n!/[k!(n-k)!]$.

Ces coefficients comptent les parties de k éléments d'un ensemble de n éléments.

Ils vérifient la symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et la relation de Pascal.

Le binôme donne

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

On peut le démontrer par récurrence ou en classant les choix des facteurs b dans le produit de n facteurs identiques.

3. Trigonométrie

Les angles sont exprimés en radians.

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques ; le cosinus est pair et le sinus impair.

Les formules d'addition produisent les formules de duplication.

Il faut notamment savoir retrouver $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$, utile en intégration.

4. Équations

Pour $a \in \mathbb{R}$, $\cos x = \cos a$ équivaut à $x = 2k\pi + a$ ou $x = 2k\pi - a$.

Pour le sinus, les familles sont $a + 2k\pi$ et $\pi - a + 2k\pi$.

Résoudre sur un intervalle consiste ensuite à filtrer ces familles, sans oublier une borne incluse.

5. Exemple et contrôle

La somme $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{10}$ vaut $2^{11} - 1 = 2047$, et non $2^{10} - 1$: onze termes sont présents.

Une vérification sur un petit rang permet souvent de repérer un décalage.

Pour toute identité supposée, tester $n = 0$ ou $n = 1$ est une première vérification, mais seule une démonstration justifie la formule générale.

Reconnaître la structure d'un calcul

Définition – Somme ou produit vide

Une somme sans terme vaut 0 ; un produit sans facteur vaut 1. Ces conventions sont compatibles avec l'addition et la multiplication. Dans une somme, seul l'indice parcourt les bornes : les autres lettres désignent des paramètres, sauf indication contraire.

Propriété – Addition et duplication

Pour tous réels a, b ,

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

En prenant $b = a$, on obtient $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ et $\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$. Ces identités sont valables pour tous les angles ; la tangente exige en revanche de contrôler les cosinus au dénominateur.

Méthode – Changer d'indice

Pour poser $j = k + 1$ dans une somme, remplacer k dans le terme et convertir les deux bornes. Ainsi $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = \sum_{j=1}^n j^2$. Vérifier que les deux sommes ont n termes permet de repérer immédiatement une borne oubliée.

Exemple résolu – 1. Faire apparaître un télescopage

Calculons $S_n = \sum_{k=1}^n 1/[k(k+1)]$ pour $n \geq 1$.

1. Décomposer le terme général en mettant au même dénominateur : $1/k - 1/(k+1) = 1/[k(k+1)]$.
2. Écrire les premiers et derniers termes. Chaque terme négatif intérieur est compensé par le terme positif suivant.
3. Conserver les deux termes qui n'ont pas de partenaire. Pour contrôler les bornes, le cas $n = 1$ doit redonner $1/2$.

$$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Exemple résolu – 2. Résoudre sans perdre de solutions

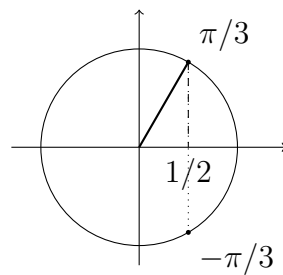
Résolvons $\cos(2x) = 1/2$ sur $[0; 2\pi]$.

1. Identifier un angle de référence : $\cos(\pi/3) = 1/2$. L'équation est équivalente à $2x = 2k\pi \pm \pi/3$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Diviser toute l'égalité par 2, période comprise : $x = k\pi \pm \pi/6$.
3. Garder les valeurs appartenant à l'intervalle demandé. Pour le signe plus, prendre $k = 0, 1$; pour le signe moins, prendre $k = 1, 2$.

$$\mathcal{S} = \{\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6\}.$$

Les bornes 0 et 2π ne conviennent pas, car le cosinus correspondant vaut 1.

Le cercle trigonométrique



La même abscisse donne les deux angles opposés modulo 2π . C'est l'origine géométrique du signe $\pm$ dans l'équation du cosinus ; les tours complets expliquent l'entier k .

À retenir – Bilan

Annoncer les bornes d'une somme, le nombre de termes et le cas exceptionnel d'une formule. En trigonométrie, déterminer d'abord toutes les familles de solutions sur $\mathbb{R}$, puis les restreindre à l'intervalle ; filtrer trop tôt peut masquer une famille entière.
