

Chapitre 04 – Corrections

Réels, suites et convergence

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Suite arithmético-géométrique

Le point fixe vaut $\ell = 2$. En posant $v_n = u_n - \ell$, on obtient $v_{n+1} = v_n/2$. Donc $u_n = \ell(1 - 2^{-n})$ et $u_n \rightarrow \ell$, car $1/2 \in]0; 1[$.

Exercice 2 – Suite arithmético-géométrique

Le point fixe vaut $\ell = \frac{3}{2}$. En posant $v_n = u_n - \ell$, on obtient $v_{n+1} = v_n/3$. Donc $u_n = \ell(1 - 3^{-n})$ et $u_n \rightarrow \ell$, car $1/3 \in]0; 1[$.

Exercice 3 – Suite arithmético-géométrique

Le point fixe vaut $\ell = \frac{5}{4}$. En posant $v_n = u_n - \ell$, on obtient $v_{n+1} = v_n/5$. Donc $u_n = \ell(1 - 5^{-n})$ et $u_n \rightarrow \ell$, car $1/5 \in]0; 1[$.

Exercice 4 – Limite rationnelle

En divisant numérateur et dénominateur par n pour $n \geq 1$, on obtient $u_n = (1 + 1/n)/(1 + 2/n)$. Les règles de calcul des limites donnent $u_n \rightarrow 1$.

Exercice 5 – Limite rationnelle

En divisant numérateur et dénominateur par n pour $n \geq 1$, on obtient $u_n = (2 + 1/n)/(1 + 2/n)$. Les règles de calcul des limites donnent $u_n \rightarrow 2$.

Exercice 6 – Limite rationnelle

En divisant numérateur et dénominateur par n pour $n \geq 1$, on obtient $u_n = (4 + 1/n)/(1 + 2/n)$. Les règles de calcul des limites donnent $u_n \rightarrow 4$.

Exercice 7 – Encadrement

On sait $|\sin n| \leq 1$. Donc $|u_n| \leq 1/(n+2) \rightarrow 0$. Le théorème d'encadrement donne $u_n \rightarrow 0$, bien que $\sin n$ ne converge pas.

Exercice 8 – Encadrement

On sait $|\sin n| \leq 1$. Donc $|u_n| \leq 1/(n+3) \rightarrow 0$. Le théorème d'encadrement donne $u_n \rightarrow 0$, bien que $\sin n$ ne converge pas.

Exercice 9 – Encadrement

On sait $|\sin n| \leq 1$. Donc $|u_n| \leq 1/(n+5) \rightarrow 0$. Le théorème d'encadrement donne $u_n \rightarrow 0$, bien que $\sin n$ ne converge pas.

Exercice 10 – Monotonie

$u_{n+1} - u_n = 1/[(n+1)(n+2)] > 0$. La suite croît, est majorée par 1, et tend vers 1 puisque $1/(n+1) \rightarrow 0$. Son minimum est $u_0 = 0$.

Exercice 11 – Monotonie

$u_{n+1} - u_n = 1/[(n+1)(n+2)] > 0$. La suite croît, est majorée par 2, et tend vers 2 puisque $1/(n+1) \rightarrow 0$. Son minimum est $u_0 = 1$.

Exercice 12 – Monotonie

$u_{n+1} - u_n = 1/[(n+1)(n+2)] > 0$. La suite croît, est majorée par 3, et tend vers 3 puisque $1/(n+1) \rightarrow 0$. Son minimum est $u_0 = 2$.

Exercice 13 – Suite géométrique

La raison a un module strictement inférieur à 1 : $u_k \rightarrow 0$. La somme vaut $[1 - (-1/2)^{N+1}]/(1 + 1/2)$ et tend vers $\frac{2}{3}$.

Exercice 14 – Suite géométrique

La raison a un module strictement inférieur à 1 : $u_k \rightarrow 0$. La somme vaut $[1 - (-1/3)^{N+1}]/(1 + 1/3)$ et tend vers $\frac{3}{4}$.

Exercice 15 – Suite géométrique

La raison a un module strictement inférieur à 1 : $u_k \rightarrow 0$. La somme vaut $[1 - (-1/4)^{N+1}]/(1 + 1/4)$ et tend vers $\frac{4}{5}$.

Exercice 16 – Approfondissement : suite adjacente

$u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)^2 > 0$. $v_{n+1} - v_n = 1/(n+1)^2 + 1/(n+1) - 1/n = -1/[n(n+1)^2] < 0$. Enfin $v_n - u_n = 1/n \rightarrow 0$. Les suites convergent vers la même limite.

Exercice 17 – Approfondissement : récurrence positive

Par récurrence, $1 \leq u_n \leq 2$. Comme $2 + u_n - u_n^2 = (2 - u_n)(u_n + 1) \geq 0$, on a $u_{n+1} \geq u_n$. La suite converge ; sa limite positive vérifie $\ell^2 = 2 + \ell$, donc $\ell = 2$.

Exercice 18 – Approfondissement : sous-suites

La sous-suite de rangs pairs vaut constamment 1, celle de rangs impairs -1 . Si la suite convergeait, ces deux sous-suites auraient la même limite. Comme $1 \neq -1$, la convergence est impossible.

Exercice 19 – Approfondissement : définition

Soit $\varepsilon > 0$. Choisir un entier $N > 1/\varepsilon$. Pour tout $n \geq N$, $|1/n - 0| \leq 1/N < \varepsilon$. Le rang dépend de la précision demandée.

Exercice 20 – Approfondissement : supremum

La suite croît de 0 vers 1. L'infimum est 0, atteint pour $n = 1$. Le supremum est 1, non atteint : chaque terme est strictement inférieur à 1, mais on trouve des termes arbitrairement proches de 1.