

Chapitre 04 – Cours

Réels, suites et convergence

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Employer la définition de limite
- Prouver une convergence monotone
- Utiliser un encadrement et des sous-suites

1. Ordre et complétude

Un majorant d'une partie A de $\mathbb{R}$ est un réel plus grand que tous ses éléments.

Un maximum est un majorant qui appartient à A ; il n'existe pas toujours.

Une partie non vide et majorée admet une borne supérieure, son plus petit majorant.

Cette propriété de complétude distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.

Par exemple, $[0; 1[$ a pour supremum 1 mais pas de maximum.

2. Limite d'une suite

Dire $u_n \rightarrow \ell$ signifie que pour toute précision $\varepsilon > 0$, tous les termes à partir d'un certain rang sont à une distance inférieure à ε de ℓ .

Le rang peut dépendre de ε .

La limite est unique.

Toute suite convergente est bornée, mais une suite bornée ne converge pas forcément : $(-1)^n$ en est un contre-exemple.

Les opérations usuelles passent à la limite lorsque leurs conditions sont satisfaites ; pour un quotient, la limite du dénominateur doit être non nulle.

Le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers zéro tend vers zéro.

3. Théorèmes de convergence

Le théorème d'encadrement affirme que deux bornes de même limite imposent cette limite à la suite intermédiaire.

Une suite croissante et majorée converge ; une suite décroissante et minorée converge.

La limite est alors un supremum ou un infimum des termes.

Des suites adjacentes sont l'une croissante, l'autre décroissante, avec une différence tendant vers zéro : elles convergent vers la même limite.

4. Récurrences et sous-suites

Avant de passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, il faut démontrer la convergence et vérifier la continuité pertinente de f .

L'équation $\ell = f(\ell)$ ne suffit pas à prouver que la limite existe.

Toute sous-suite d'une suite convergente a la même limite.

Deux sous-suites de limites différentes permettent donc de démontrer une divergence.

5. Exemple résolu

Si $u_{n+1} = u_n/2 + 1$ et $u_0 = 0$, le point fixe est 2.

En posant $v_n = u_n - 2$, on obtient $v_{n+1} = v_n/2$, donc $u_n = 2 - 2/2^n$.

Cette expression prouve directement la convergence vers 2, la croissance et la majoration.

Elle fournit aussi un contrôle d'erreur explicite : $|u_n - 2| = 2^{1-n}$.

Traduire la convergence avec précision

Définition – Définition quantifiée

Pour une suite réelle, $u_n \rightarrow \ell$ signifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Le rang dépend de la précision choisie, mais doit ensuite convenir à tous les indices supérieurs. Une suite qui s'approche parfois de ℓ ne suffit pas.

Propriété – Suites extraites et divergence

Une suite extraite s'écrit $(u_{\varphi(n)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante. Si $u_n \rightarrow \ell$, alors $u_{\varphi(n)} \rightarrow \ell$. Pour $u_n = (-1)^n$, les rangs pairs donnent constamment 1 et les rangs impairs

constamment -1 ; ces limites différentes prouvent la divergence de la suite entière, malgré sa bornitude.

Exemple résolu – 1. Une récurrence non linéaire

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 2$: l'intervalle $[0; 2]$ est stable par $x \mapsto \sqrt{2 + x}$.
2. Pour $0 \leq x \leq 2$, on a $2 + x - x^2 = (2 - x)(x + 1) \geq 0$. Les deux membres étant positifs, cela donne $\sqrt{2 + x} \geq x$: la suite est croissante.
3. La suite converge donc vers $\ell \in [0; 2]$. La continuité de la racine donne $\ell^2 = 2 + \ell$, puis $\ell = 2$ ou -1 ; seule 2 appartient à l'intervalle.

La convergence précède ici la résolution de l'équation du point fixe.

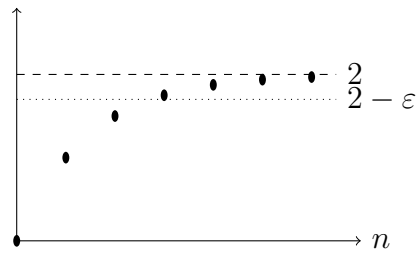
Exemple résolu – 2. Certifier un rang de précision

Pour $u_n = (3n + 1)/(n + 1)$, cherchons quand $|u_n - 3| < 10^{-3}$.

1. Soustraire la limite présumée avant de majorer : $u_n - 3 = -2/(n + 1)$. Le quotient tend vers zéro, ce qui prouve déjà $u_n \rightarrow 3$.
2. Résoudre l'inégalité exacte $2/(n + 1) < 10^{-3}$. Elle équivaut à $n + 1 > 2000$.
3. Pour les entiers, $n \geq 2000$ suffit et constitue le premier rang possible. Au rang 1999, l'écart vaut exactement 10^{-3} et l'inégalité stricte échoue.

Cet exemple distingue une estimation visuelle d'un contrôle valable pour tous les rangs suivants.

Une bande de convergence



Les points représentent la suite affine étudiée dans le socle, $u_n = 2 - 2^{1-n}$. À partir d'un certain rang, ils restent tous dans la bande entre $2 - \varepsilon$ et 2 ; une limite concerne cette permanence.

À retenir – Bilan

Pour une récurrence, établir un intervalle stable puis un mécanisme de convergence. Une fois seulement la limite obtenue, résoudre l'équation qu'elle vérifie et éliminer les valeurs incompatibles avec les bornes. Pour un calcul explicite, isoler l'écart à la limite donne souvent aussi une vitesse de convergence.
