

Chapitre 05 – Corrections

Limites et continuité des fonctions

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Lever une indétermination

Pour $x \neq 1$, le quotient vaut $x + 1$ après factorisation. Sa limite est donc 2. L'expression initiale n'est pas définie en 1, mais sa limite existe.

Exercice 2 – Lever une indétermination

Pour $x \neq 2$, le quotient vaut $x + 2$ après factorisation. Sa limite est donc 4. L'expression initiale n'est pas définie en 2, mais sa limite existe.

Exercice 3 – Lever une indétermination

Pour $x \neq 3$, le quotient vaut $x + 3$ après factorisation. Sa limite est donc 6. L'expression initiale n'est pas définie en 3, mais sa limite existe.

Exercice 4 – Quantité conjuguée

En multipliant par la quantité conjuguée, le quotient devient $1/(\sqrt{1+x}+\sqrt{1})$. La limite est $1/(2\sqrt{1}) = \frac{1}{2}$.

Exercice 5 – Quantité conjuguée

En multipliant par la quantité conjuguée, le quotient devient $1/(\sqrt{4+x}+\sqrt{4})$. La limite est $1/(2\sqrt{4}) = \frac{1}{4}$.

Exercice 6 – Quantité conjuguée

En multipliant par la quantité conjuguée, le quotient devient $1/(\sqrt{9+x}+\sqrt{9})$. La limite est $1/(2\sqrt{9}) = \frac{1}{6}$.

Exercice 7 – Continuité par morceaux

$f(x) = 1 \sin(1x)/(1x) \rightarrow 1$ par la limite usuelle. Il faut poser $f(0) = 1$, et cette valeur est la seule donnant un prolongement continu.

Exercice 8 – Continuité par morceaux

$f(x) = 2 \sin(2x)/(2x) \rightarrow 2$ par la limite usuelle. Il faut poser $f(0) = 2$, et cette valeur est la seule donnant un prolongement continu.

Exercice 9 – Continuité par morceaux

$f(x) = 3 \sin(3x)/(3x) \rightarrow 3$ par la limite usuelle. Il faut poser $f(0) = 3$, et cette valeur est la seule donnant un prolongement continu.

Exercice 10 – Théorème des valeurs intermédiaires

Le polynôme est continu et sa dérivée $3x^2 + 1$ est strictement positive. Il est strictement croissant, avec limites $-\infty$ et $+\infty$. Le TVI donne l'existence d'une racine, la stricte croissance son unicité.

Exercice 11 – Théorème des valeurs intermédiaires

Le polynôme est continu et sa dérivée $3x^2 + 1$ est strictement positive. Il est strictement croissant, avec limites $-\infty$ et $+\infty$. Le TVI donne l'existence d'une racine, la stricte croissance son unicité.

Exercice 12 – Théorème des valeurs intermédiaires

Le polynôme est continu et sa dérivée $3x^2 + 1$ est strictement positive. Il est strictement croissant, avec limites $-\infty$ et $+\infty$. Le TVI donne l'existence d'une racine, la stricte croissance son unicité.

Exercice 13 – Bijection continue

f est continue strictement croissante, tend vers 2 en $-\infty$ sans l'atteindre et vers $+\infty$ en $+\infty$. Son image est $]2; +\infty[$ et sa réciproque est $y \mapsto \ln(y - 2)$.

Exercice 14 – Bijection continue

f est continue strictement croissante, tend vers 3 en $-\infty$ sans l'atteindre et vers $+\infty$ en $+\infty$. Son image est $]3; +\infty[$ et sa réciproque est $y \mapsto \ln(y - 3)$.

Exercice 15 – Bijection continue

f est continue strictement croissante, tend vers 5 en $-\infty$ sans l'atteindre et vers $+\infty$ en $+\infty$. Son image est $]5; +\infty[$ et sa réciproque est $y \mapsto \ln(y - 5)$.

Exercice 16 – Approfondissement : limite oscillante

Le premier produit est majoré en valeur absolue par $|x|$, donc tend vers 0. Pour le second, les suites $x_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$ et $y_n = 1/(3\pi/2 + 2n\pi)$ tendent vers zéro avec images 1 et -1 : aucune limite.

Exercice 17 – Approfondissement : image d'un segment

Le théorème des bornes atteintes s'applique à un segment compact. Sur un intervalle ouvert, il peut échouer : $f(x) = x$ sur $]0; 1[$ n'atteint ni 0 ni 1, bien que ces nombres soient ses bornes.

Exercice 18 – Approfondissement : dichotomie

Après n étapes, la largeur vaut $2/2^n$. Il faut $2^n \geq 2000$. Comme $2^{10} = 1024$ et $2^{11} = 2048$, 11 étapes suffisent et 10 ne suffisent pas.

Exercice 19 – Approfondissement : discontinuité

La limite à droite vaut 1, celle à gauche -1 . Elles sont différentes, donc la limite bilatérale n'existe pas. Aucune modification de la seule valeur en zéro ne peut rendre cette fonction continue.

Exercice 20 – Approfondissement : réciproque

f est continue strictement croissante, de limites 0 et 1. Elle réalise une bijection sur $]0; 1[$. Résoudre $y = x/(1+x)$ donne $x = y/(1-y)$, bien défini pour $0 < y < 1$.