

Chapitre 05 – Exercices

Limites et continuité des fonctions

20 exercices progressifs

Exercice 1 – Lever une indétermination

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)/(x - 1)$.

Exercice 2 – Lever une indétermination

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)/(x - 2)$.

Exercice 3 – Lever une indétermination

Calculer $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)/(x - 3)$.

Exercice 4 – Quantité conjuguée

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1})/x$.

Exercice 5 – Quantité conjuguée

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{4+x} - \sqrt{4})/x$.

Exercice 6 – Quantité conjuguée

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{9+x} - \sqrt{9})/x$.

Exercice 7 – Continuité par morceaux

Prolonger en 0 la fonction $f(x) = \sin(1x)/x$ définie pour $x \neq 0$.

Exercice 8 – Continuité par morceaux

Prolonger en 0 la fonction $f(x) = \sin(2x)/x$ définie pour $x \neq 0$.

Exercice 9 – Continuité par morceaux

Prolonger en 0 la fonction $f(x) = \sin(3x)/x$ définie pour $x \neq 0$.

Exercice 10 – Théorème des valeurs intermédiaires

Prouver que $x^3 + x - 1$ possède une unique racine réelle.

Exercice 11 – Théorème des valeurs intermédiaires

Prouver que $x^3 + x - 2$ possède une unique racine réelle.

Exercice 12 – Théorème des valeurs intermédiaires

Prouver que $x^3 + x - 3$ possède une unique racine réelle.

Exercice 13 – Bijection continue

Montrer que $f(x) = e^x + 2$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.

Exercice 14 – Bijection continue

Montrer que $f(x) = e^x + 3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.

Exercice 15 – Bijection continue

Montrer que $f(x) = e^x + 5$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.

Exercice 16 – Approfondissement : limite oscillante

Calculer la limite de $x \sin(1/x)$ en 0, puis celle de $\sin(1/x)$ si elle existe.

Exercice 17 – Approfondissement : image d'un segment

Pourquoi une fonction continue sur $[a; b]$ atteint-elle un minimum et un maximum ? Ce résultat reste-t-il vrai sur $]a; b[$?

Exercice 18 – Approfondissement : dichotomie

Combien de divisions par deux suffisent pour encadrer une racine dans un intervalle de largeur au plus 10^{-3} à partir de $[0; 2]$?

Exercice 19 – Approfondissement : discontinuité

Étudier la continuité en zéro de $f(x) = 1$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = -1$ pour $x < 0$.

Exercice 20 – Approfondissement : réciproque

Déterminer la réciproque de $f : x \mapsto x/(1+x)$ de $]0; +\infty[$ sur son image.