Chapitre 06 – Corrections

Dérivation, accroissements finis et convexité

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Dérivée et tangente

$f\prime(x) = 2x^1$, $f(1) = 1$ et $f\prime(1) = 2$. La tangente est $y = 1 + 2(x-1) = 2x + (-1)$.

Exercice 2 – Dérivée et tangente

$f\prime(x) = 3x^2$, $f(1) = 1$ et $f\prime(1) = 3$. La tangente est $y = 1 + 3(x-1) = 3x + (-2)$.

Exercice 3 – Dérivée et tangente

$f\prime(x) = 5x^4$, $f(1) = 1$ et $f\prime(1) = 5$. La tangente est $y = 1 + 5(x-1) = 5x + (-4)$.

Exercice 4 – Produit et composition

La règle du produit donne $f\prime(x) = e^{1x} + 1xe^{1x} = (1 + 1x)e^{1x}$. Le facteur 1 vient de la composition dans l'exponentielle.

Exercice 5 – Produit et composition

La règle du produit donne $f\prime(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (1 + 2x)e^{2x}$. Le facteur 2 vient de la composition dans l'exponentielle.

Exercice 6 – Produit et composition

La règle du produit donne $f\prime(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = (1 + 3x)e^{3x}$. Le facteur 3 vient de la composition dans l'exponentielle.

Exercice 7 – Quotient

Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $f\prime(x) = [(x+1) - x]/(x+1)^2 = 1/(x+1)^2 > 0$. La fonction croît sur chacun des deux intervalles de son domaine, pas sur leur réunion entière.

Exercice 8 – Quotient

Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. $f\prime(x) = [(x+2) - x]/(x+2)^2 = 2/(x+2)^2 > 0$. La fonction croît sur chacun des deux intervalles de son domaine, pas sur leur réunion entière.

Exercice 9 – Quotient

Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$. $f\prime(x) = [(x+4) - x]/(x+4)^2 = 4/(x+4)^2 > 0$. La fonction croît sur chacun des deux intervalles de son domaine, pas sur leur réunion entière.

Exercice 10 – Extremum

$f\prime(x) = 2(x-1)$ est négative avant 1, nulle en 1 et positive après. Le minimum global vaut $f(1) = 0$. On retrouve cela avec $f(x) = (x-1)^2 + (0)$.

Exercice 11 – Extremum

$f\prime(x) = 2(x-2)$ est négative avant 2, nulle en 2 et positive après. Le minimum global vaut $f(2) = -3$. On retrouve cela avec $f(x) = (x-2)^2 + (-3)$.

Exercice 12 – Extremum

$f\prime(x) = 2(x-3)$ est négative avant 3, nulle en 3 et positive après. Le minimum global vaut $f(3) = -8$. On retrouve cela avec $f(x) = (x-3)^2 + (-8)$.

Exercice 13 – Convexité

$f\prime\prime(x) = 1e^{1x} > 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction est strictement convexe ; son graphe se situe au-dessus de toute tangente, notamment $e^{1x} \geq 1 + 1x$.

Exercice 14 – Convexité

$f\prime\prime(x) = 4e^{2x} > 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction est strictement convexe ; son graphe se situe au-dessus de toute tangente, notamment $e^{2x} \geq 1 + 2x$.

Exercice 15 – Convexité

$f\prime\prime(x) = 9e^{3x} > 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction est strictement convexe ; son graphe se situe au-dessus de toute tangente, notamment $e^{3x} \geq 1 + 3x$.

Exercice 16 – Approfondissement : Rolle

Sur le segment joignant ces racines, le polynôme est continu et dérivable à l'intérieur ; ses valeurs aux extrémités sont égales. Le théorème de Rolle fournit un point intérieur où la dérivée s'annule.

Exercice 17 – Approfondissement : accroissements finis

Si $a = b$, c'est immédiat. Sinon, le TAF donne $\sin b - \sin a = (b-a)\cos c$ pour un point intermédiaire c. Comme $|\cos c| \leq 1$, l'inégalité suit.

Exercice 18 – Approfondissement : non-dérivabilité

Le quotient $(|h| - 0)/h$ vaut 1 pour $h > 0$ et -1 pour $h < 0$. Il n'a pas de limite bilatérale. La fonction est continue mais non dérivable en zéro.

Exercice 19 – Approfondissement : point critique

Non : pour $f(x) = x^3$, $f\prime(0) = 0$, mais f reste strictement croissante. Un point critique est un candidat, pas une preuve d'extremum.

Exercice 20 – Approfondissement : logarithme

Poser $g(x) = x - \ln(1+x)$. Alors $g\prime(x) = x/(1+x)$, négative sur $]-1;0[$ et positive sur $]0;+\infty[$. Son minimum est $g(0) = 0$, d'où le résultat.