

Chapitre 07 – Corrections

Fonctions usuelles et réciproques

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Exponentielle

L'exponentielle est injective : $1x = 2$, donc $x = 2$. Cette méthode évite de prendre des logarithmes de quantités dont le signe serait incertain.

Exercice 2 – Exponentielle

L'exponentielle est injective : $2x = 4$, donc $x = 2$. Cette méthode évite de prendre des logarithmes de quantités dont le signe serait incertain.

Exercice 3 – Exponentielle

L'exponentielle est injective : $3x = 6$, donc $x = 2$. Cette méthode évite de prendre des logarithmes de quantités dont le signe serait incertain.

Exercice 4 – Logarithme

Le domaine est $x > 1$. Sur ce domaine, $\ln(x - 1) = 0$ équivaut à $x - 1 = 1$, donc $x = 2$, bien autorisé.

Exercice 5 – Logarithme

Le domaine est $x > 2$. Sur ce domaine, $\ln(x - 2) = 0$ équivaut à $x - 2 = 1$, donc $x = 3$, bien autorisé.

Exercice 6 – Logarithme

Le domaine est $x > 3$. Sur ce domaine, $\ln(x - 3) = 0$ équivaut à $x - 3 = 1$, donc $x = 4$, bien autorisé.

Exercice 7 – Dérivée composée

L'argument est strictement positif pour tout réel. La dérivée vaut $2 \times 1x/(1 + 1x^2) = 2x/(1 + 1x^2)$.

Exercice 8 – Dérivée composée

L'argument est strictement positif pour tout réel. La dérivée vaut $2 \times 2x/(1 + 2x^2) = 4x/(1 + 2x^2)$.

Exercice 9 – Dérivée composée

L'argument est strictement positif pour tout réel. La dérivée vaut $2 \times 4x/(1 + 4x^2) = 8x/(1 + 4x^2)$.

Exercice 10 – Arctangente

$f'(x) = 1/(1 + 1x^2)$. Comme $1 > 0$, son argument tend vers $+\infty$; la limite est $\pi/2$, borne non atteinte.

Exercice 11 – Arctangente

$f(x) = 2/(1+4x^2)$. Comme $2 > 0$, son argument tend vers $+\infty$; la limite est $\pi/2$, borne non atteinte.

Exercice 12 – Arctangente

$f(x) = 3/(1+9x^2)$. Comme $3 > 0$, son argument tend vers $+\infty$; la limite est $\pi/2$, borne non atteinte.

Exercice 13 – Puissance réelle

On écrit $f(x) = \exp[(1/2) \ln x]$. La composition donne $f(x) = (1/2)x^{1/2-1}$. La restriction $x > 0$ justifie cette définition pour les puissances non entières.

Exercice 14 – Puissance réelle

On écrit $f(x) = \exp[(2/2) \ln x]$. La composition donne $f(x) = (2/2)x^{2/2-1}$. La restriction $x > 0$ justifie cette définition pour les puissances non entières.

Exercice 15 – Puissance réelle

On écrit $f(x) = \exp[(3/2) \ln x]$. La composition donne $f(x) = (3/2)x^{3/2-1}$. La restriction $x > 0$ justifie cette définition pour les puissances non entières.

Exercice 16 – Approfondissement : hyperboliques

$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ et $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$. La différence des carrés donne $[(2e^{-x})(2e^x)]/4 = 1$.

Exercice 17 – Approfondissement : réciproque

Le sinus est une bijection de cet intervalle vers $[-1; 1]$, dont arcsin est la réciproque. Hors de cet intervalle, la formule échoue : $\arcsin(\sin \pi) = 0 \neq \pi$.

Exercice 18 – Approfondissement : dérivée réciproque

La dérivation donne $(1 + \tan^2(\arctan x))(\arctan x)' = 1$. Comme la tangente du terme intérieur vaut x , on obtient $(\arctan x)' = 1/(1 + x^2)$.

Exercice 19 – Approfondissement : comparaison

Par croissance comparée, toute puissance positive domine le logarithme. On peut aussi poser $x = e^t$, puis étudier $t/e^t \rightarrow 0$. La limite est zéro.

Exercice 20 – Approfondissement : identité

La dérivée de la somme vaut $1/(1+x^2) - 1/(1+x^2) = 0$ sur $]0; +\infty[$. La somme est constante ; en $x = 1$, elle vaut $\pi/4 + \pi/4 = \pi/2$.