

Chapitre 08 – Corrections

Intégration et primitives

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Intégrale polynomiale

Une primitive est $x^2/(2)$. L'intégrale vaut $[x^2/(2)]_0^1 = \frac{1}{2}$.

Exercice 2 – Intégrale polynomiale

Une primitive est $x^3/(3)$. L'intégrale vaut $[x^3/(3)]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Exercice 3 – Intégrale polynomiale

Une primitive est $x^5/(5)$. L'intégrale vaut $[x^5/(5)]_0^1 = \frac{1}{5}$.

Exercice 4 – Composition

La fonction intégrée est la dérivée de e^{1x^2} . Le résultat est $e^1 - 1$. On peut aussi poser $u = 1x^2$, $du = 2x dx$.

Exercice 5 – Composition

La fonction intégrée est la dérivée de e^{2x^2} . Le résultat est $e^2 - 1$. On peut aussi poser $u = 2x^2$, $du = 4x dx$.

Exercice 6 – Composition

La fonction intégrée est la dérivée de e^{3x^2} . Le résultat est $e^3 - 1$. On peut aussi poser $u = 3x^2$, $du = 6x dx$.

Exercice 7 – Intégration par parties

Prendre $u = x$, $v' = e^x$. Alors $\int xe^x = [xe^x] - \int e^x$, d'où $\int_0^1 xe^x dx = (1 - 1)e^1 + 1$.

Exercice 8 – Intégration par parties

Prendre $u = x$, $v' = e^x$. Alors $\int xe^x = [xe^x] - \int e^x$, d'où $\int_0^2 xe^x dx = (2 - 1)e^2 + 1$.

Exercice 9 – Intégration par parties

Prendre $u = x$, $v' = e^x$. Alors $\int xe^x = [xe^x] - \int e^x$, d'où $\int_0^3 xe^x dx = (3 - 1)e^3 + 1$.

Exercice 10 – Logarithme

Une primitive est $\ln(1 + x)$ sur l'intervalle considéré. Le résultat vaut $\ln(2)$. Le dénominateur ne s'annule pas sur le segment.

Exercice 11 – Logarithme

Une primitive est $\ln(1+x)$ sur l'intervalle considéré. Le résultat vaut $\ln(3)$. Le dénominateur ne s'annule pas sur le segment.

Exercice 12 – Logarithme

Une primitive est $\ln(1+x)$ sur l'intervalle considéré. Le résultat vaut $\ln(4)$. Le dénominateur ne s'annule pas sur le segment.

Exercice 13 – Aire et intégrale

La première intégrale est nulle par imparité. La seconde vaut $2 \int_0^1 x \, dx = 1$. Une intégrale signée n'est donc pas toujours l'aire géométrique entre courbe et axe.

Exercice 14 – Aire et intégrale

La première intégrale est nulle par imparité. La seconde vaut $2 \int_0^2 x \, dx = 4$. Une intégrale signée n'est donc pas toujours l'aire géométrique entre courbe et axe.

Exercice 15 – Aire et intégrale

La première intégrale est nulle par imparité. La seconde vaut $2 \int_0^3 x \, dx = 9$. Une intégrale signée n'est donc pas toujours l'aire géométrique entre courbe et axe.

Exercice 16 – Approfondissement : Cauchy-Schwarz

Pour tout t , $\int_0^1 (f-t)^2 \geq 0$. En développant puis en choisissant $t = \int_0^1 f$, on obtient l'inégalité. C'est aussi Cauchy-Schwarz appliquée à f et à la fonction constante 1.

Exercice 17 – Approfondissement : fractions rationnelles

La décomposition $1/[(x+1)(x+2)] = 1/(x+1) - 1/(x+2)$ donne la primitive $\ln(x+1) - \ln(x+2)$. Entre zéro et un : $\ln(4/3)$.

Exercice 18 – Approfondissement : changement de variable

Poser $u = 1 + x^2$ transforme les bornes en 1 et 2 et donne $du = 2x \, dx$. L'intégrale devient $\int_1^2 du/u = \ln 2$.

Exercice 19 – Approfondissement : moyenne intégrale

La fonction atteint un minimum m et un maximum M . Par positivité de l'intégrale, $m \leq (\int_a^b f)/(b-a) \leq M$. Le TVI garantit une valeur c réalisant cette moyenne.

Exercice 20 – Approfondissement : primitive à borne variable

La fonction intégrée est continue ; $G(u) = \int_0^u e^{-t^2} \, dt$ est dérivable avec $G'(u) = e^{-u^2}$. Par composition, $F'(x) = 2xe^{-x^4}$.