

## Chapitre 09 – Corrections

### Équations différentielles linéaires

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

#### Exercice 1 – Équation homogène

Les solutions homogènes sont  $Ce^{-1x}$ . La condition initiale donne  $C = 2$ , donc  $y(x) = 2e^{-1x}$ . Dériver cette expression vérifie l'équation.

#### Exercice 2 – Équation homogène

Les solutions homogènes sont  $Ce^{-2x}$ . La condition initiale donne  $C = 2$ , donc  $y(x) = 2e^{-2x}$ . Dériver cette expression vérifie l'équation.

#### Exercice 3 – Équation homogène

Les solutions homogènes sont  $Ce^{-3x}$ . La condition initiale donne  $C = 2$ , donc  $y(x) = 2e^{-3x}$ . Dériver cette expression vérifie l'équation.

#### Exercice 4 – Forçage constant

La constante 3 est solution particulière. La solution générale vaut  $3 + Ce^{-1x}$ . À zéro,  $1 = 3 + C$ , donc  $y = 3 - 2e^{-1x}$ .

#### Exercice 5 – Forçage constant

La constante 3 est solution particulière. La solution générale vaut  $3 + Ce^{-2x}$ . À zéro,  $1 = 3 + C$ , donc  $y = 3 - 2e^{-2x}$ .

#### Exercice 6 – Forçage constant

La constante 3 est solution particulière. La solution générale vaut  $3 + Ce^{-4x}$ . À zéro,  $1 = 3 + C$ , donc  $y = 3 - 2e^{-4x}$ .

#### Exercice 7 – Résonance du premier ordre

Poser  $y = e^{1x}u$  donne  $y' - 1y = e^{1x}u'$ . Ainsi  $u' = 1$  et  $y = e^{1x}(x + C)$ . Une simple exponentielle particulière n'aurait pas suffi.

#### Exercice 8 – Résonance du premier ordre

Poser  $y = e^{2x}u$  donne  $y' - 2y = e^{2x}u'$ . Ainsi  $u' = 1$  et  $y = e^{2x}(x + C)$ . Une simple exponentielle particulière n'aurait pas suffi.

#### Exercice 9 – Résonance du premier ordre

Poser  $y = e^{3x}u$  donne  $y' - 3y = e^{3x}u'$ . Ainsi  $u' = 1$  et  $y = e^{3x}(x + C)$ . Une simple exponentielle particulière n'aurait pas suffi.

**Exercice 10 – Oscillateur**

L'équation caractéristique a pour racines  $\pm 1i$ . Les solutions réelles sont  $A \cos(1x) + B \sin(1x)$ . Les données imposent  $A = 1$ ,  $B = 0$ , donc  $y = \cos(1x)$ .

**Exercice 11 – Oscillateur**

L'équation caractéristique a pour racines  $\pm 2i$ . Les solutions réelles sont  $A \cos(2x) + B \sin(2x)$ . Les données imposent  $A = 1$ ,  $B = 0$ , donc  $y = \cos(2x)$ .

**Exercice 12 – Oscillateur**

L'équation caractéristique a pour racines  $\pm 3i$ . Les solutions réelles sont  $A \cos(3x) + B \sin(3x)$ . Les données imposent  $A = 1$ ,  $B = 0$ , donc  $y = \cos(3x)$ .

**Exercice 13 – Racine double**

Le polynôme caractéristique est  $(r - 1)^2$ . La solution générale est  $y(x) = (A + Bx)e^{1x}$ , avec deux constantes réelles indépendantes.

**Exercice 14 – Racine double**

Le polynôme caractéristique est  $(r - 2)^2$ . La solution générale est  $y(x) = (A + Bx)e^{2x}$ , avec deux constantes réelles indépendantes.

**Exercice 15 – Racine double**

Le polynôme caractéristique est  $(r - 3)^2$ . La solution générale est  $y(x) = (A + Bx)e^{3x}$ , avec deux constantes réelles indépendantes.

**Exercice 16 – Approfondissement : variation de la constante**

En multipliant par  $e^x$ ,  $(e^x y)' = x e^x$ . Une primitive du second membre est  $(x - 1)e^x$ . Donc  $y = x - 1 + C e^{-x}$ . La condition initiale impose  $C = 1$ .

**Exercice 17 – Approfondissement : coefficient variable**

Le facteur intégrant est  $e^{x^2}$ . Alors  $(y e^{x^2})' = 2x e^{x^2} = (e^{x^2})'$ . Ainsi  $y = 1 + C e^{-x^2}$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 18 – Approfondissement : second ordre forcé**

Une solution particulière est 1. Les solutions générales sont  $1 + A \cos x + B \sin x$ . Les conditions donnent  $A = -1$ ,  $B = 0$ , donc  $y = 1 - \cos x$ .

**Exercice 19 – Approfondissement : stabilité**

La solution vaut  $b/a + (y_0 - b/a)e^{-ax}$ . Elle tend vers l'équilibre  $b/a$ . La différence de deux solutions est  $(y_0 - z_0)e^{-ax}$  et tend vers zéro : l'équilibre est attractif lorsque le temps tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 20 – Approfondissement : unicité**

Leur différence  $z$  résout  $z' + az = 0$ . Si  $A$  est une primitive de  $a$ ,  $(ze^A)' = 0$ , donc  $ze^A$  est constante. Sa valeur en  $x_0$  est nulle, donc  $z = 0$  partout sur l'intervalle.