

Chapitre 10 – Corrections

Comparaisons asymptotiques et développements limités

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Développement exponentiel

$e^x = \sum_{k=0}^1 x^k/k! + o(x^1)$. En particulier $e^x - 1 = x + o(x)$, donc le quotient tend vers 1.

Exercice 2 – Développement exponentiel

$e^x = \sum_{k=0}^2 x^k/k! + o(x^2)$. En particulier $e^x - 1 = x + o(x)$, donc le quotient tend vers 1.

Exercice 3 – Développement exponentiel

$e^x = \sum_{k=0}^3 x^k/k! + o(x^3)$. En particulier $e^x - 1 = x + o(x)$, donc le quotient tend vers 1.

Exercice 4 – Logarithme composé

Le DL usuel $\ln(1+u) = u - u^2/2 + o(u^2)$ donne $1x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$. La composition est valable dans un voisinage de zéro où l'argument reste positif.

Exercice 5 – Logarithme composé

Le DL usuel $\ln(1+u) = u - u^2/2 + o(u^2)$ donne $2x - 2x^2 + o(x^2)$. La composition est valable dans un voisinage de zéro où l'argument reste positif.

Exercice 6 – Logarithme composé

Le DL usuel $\ln(1+u) = u - u^2/2 + o(u^2)$ donne $3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$. La composition est valable dans un voisinage de zéro où l'argument reste positif.

Exercice 7 – Équivalent

$\cos u = 1 - u^2/2 + o(u^2)$, donc $1 - \cos(1x) \sim \frac{1}{2}x^2$. Le premier terme non nul détermine l'équivalent.

Exercice 8 – Équivalent

$\cos u = 1 - u^2/2 + o(u^2)$, donc $1 - \cos(2x) \sim 2x^2$. Le premier terme non nul détermine l'équivalent.

Exercice 9 – Équivalent

$\cos u = 1 - u^2/2 + o(u^2)$, donc $1 - \cos(3x) \sim \frac{9}{2}x^2$. Le premier terme non nul détermine l'équivalent.

Exercice 10 – Quotient de DL

$e^{1x} = 1 + 1x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$. Après soustraction puis division, la limite vaut $\frac{1}{2}$.

Exercice 11 – Quotient de DL

$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$. Après soustraction puis division, la limite vaut 2.

Exercice 12 – Quotient de DL

$e^{4x} = 1 + 4x + 8x^2 + o(x^2)$. Après soustraction puis division, la limite vaut 8.

Exercice 13 – Puissance et DL

Pour $\alpha = 1/2$, la formule donne $1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1)x^2/2 + o(x^2)$, soit $1 + \frac{1}{2}x + (\frac{-1}{8})x^2 + o(x^2)$.

Exercice 14 – Puissance et DL

Pour $\alpha = 2/2$, la formule donne $1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1)x^2/2 + o(x^2)$, soit $1 + 1x + (0)x^2 + o(x^2)$.

Exercice 15 – Puissance et DL

Pour $\alpha = 3/2$, la formule donne $1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1)x^2/2 + o(x^2)$, soit $1 + \frac{3}{2}x + (\frac{3}{8})x^2 + o(x^2)$.

Exercice 16 – Approfondissement : annulation

Le DL d'ordre 3 donne $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$. Les termes linéaires s'annulent ; la limite est $-1/6$.

Exercice 17 – Approfondissement : produit

On multiplie $(1 + x + x^2/2 + x^3/6 + o(x^3))(1 - x^2/2 + o(x^3))$ et on ne conserve que les termes de degré au plus 3 : $1 + x - x^3/3 + o(x^3)$.

Exercice 18 – Approfondissement : quotient

$1/(1+x) = 1 - x + x^2 + o(x^2)$. En multipliant par $1 + x + x^2/2 + o(x^2)$, on obtient $1 + x^2/2 + o(x^2)$.

Exercice 19 – Approfondissement : tangente et courbe

Le DL donne $\ln(1+x) - x = -x^2/2 + o(x^2)$. Cette différence est négative pour tout x non nul suffisamment proche de zéro ; la courbe est sous la tangente $y = x$.

Exercice 20 – Approfondissement : suite

Poser $x = 1/n$ dans le DL $\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$. L'expression vaut $-1/2 + o(1)$ et converge vers $-1/2$.