

Chapitre 11 – Corrections

Polynômes et fractions rationnelles

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Division polynomiale

On obtient $X^2 + 1X + 1 = (X - 1)(X + 2) + 3$. Le reste vaut aussi $P(1)$, ce qui vérifie le calcul.

Exercice 2 – Division polynomiale

On obtient $X^2 + 2X + 1 = (X - 2)(X + 4) + 9$. Le reste vaut aussi $P(2)$, ce qui vérifie le calcul.

Exercice 3 – Division polynomiale

On obtient $X^2 + 3X + 1 = (X - 3)(X + 6) + 19$. Le reste vaut aussi $P(3)$, ce qui vérifie le calcul.

Exercice 4 – Racines et multiplicité

Le degré est 3. 1 est racine double et -1 racine simple, car les deux nombres sont distincts. $P'(1) = 0$ tandis que le facteur $(X - 1)^3$ ne divise pas P .

Exercice 5 – Racines et multiplicité

Le degré est 3. 2 est racine double et -1 racine simple, car les deux nombres sont distincts. $P'(2) = 0$ tandis que le facteur $(X - 2)^3$ ne divise pas P .

Exercice 6 – Racines et multiplicité

Le degré est 3. 3 est racine double et -1 racine simple, car les deux nombres sont distincts. $P'(3) = 0$ tandis que le facteur $(X - 3)^3$ ne divise pas P .

Exercice 7 – Éléments simples

La différence $1/(x + 1) - 1/(x + 2)$ a pour numérateur 1 et pour dénominateur le produit demandé. La formule vaut pour $x \neq -1, -2$.

Exercice 8 – Éléments simples

La différence $1/(x + 2) - 1/(x + 3)$ a pour numérateur 1 et pour dénominateur le produit demandé. La formule vaut pour $x \neq -2, -3$.

Exercice 9 – Éléments simples

La différence $1/(x + 4) - 1/(x + 5)$ a pour numérateur 1 et pour dénominateur le produit demandé. La formule vaut pour $x \neq -4, -5$.

Exercice 10 – Racines complexes

Les 2 racines sont $\omega_k = e^{2ik\pi/2}$. Elles sont simples car la dérivée $2X^1$ ne s'annule en aucune d'elles. Comme le polynôme est unitaire, $X^2 - 1 = \prod_{k=0}^1 (X - \omega_k)$.

Exercice 11 – Racines complexes

Les 3 racines sont $\omega_k = e^{2ik\pi/3}$. Elles sont simples car la dérivée $3X^2$ ne s'annule en aucune d'elles. Comme le polynôme est unitaire, $X^3 - 1 = \prod_{k=0}^2 (X - \omega_k)$.

Exercice 12 – Racines complexes

Les 4 racines sont $\omega_k = e^{2ik\pi/4}$. Elles sont simples car la dérivée $4X^3$ ne s'annule en aucune d'elles. Comme le polynôme est unitaire, $X^4 - 1 = \prod_{k=0}^3 (X - \omega_k)$.

Exercice 13 – PGCD polynomial

Le seul facteur irréductible commun est $X - 1$, avec multiplicité minimale 1. Le PGCD unitaire est donc $X - 1$.

Exercice 14 – PGCD polynomial

Le seul facteur irréductible commun est $X - 2$, avec multiplicité minimale 1. Le PGCD unitaire est donc $X - 2$.

Exercice 15 – PGCD polynomial

Le seul facteur irréductible commun est $X - 3$, avec multiplicité minimale 1. Le PGCD unitaire est donc $X - 3$.

Exercice 16 – Approfondissement : nombre de racines

Une racine a donne la factorisation $P = (X - a)Q$. Toute autre racine est racine de Q . Une récurrence sur le degré, à partir des constantes non nulles, donne la borne.

Exercice 17 – Approfondissement : identité

Leur différence a degré au plus n et possède au moins $n + 1$ racines. Le théorème sur le nombre de racines oblige cette différence à être nulle.

Exercice 18 – Approfondissement : partie entière

La division donne $x + (x + 1)/(x^2 - 1)$. Sur le domaine $x \neq \pm 1$, le dernier quotient se simplifie en $1/(x - 1)$. Donc la décomposition est $x + 1/(x - 1)$, en conservant l'exclusion initiale $x = -1$ pour la fonction donnée.

Exercice 19 – Approfondissement : coefficients

Il vaut $(X - 1)(X - 2)(X - 3) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$. La somme des racines donne 6, leur produit 6, cohérents avec les coefficients.

Exercice 20 – Approfondissement : interpolation

Écrire $P = aX^2 + bX + c$. $c = 1$, $a + b = 2$, $4a + 2b = 6$ donnent $a = b = 1$. Donc $P = X^2 + X + 1$. L'unicité vient du fait qu'une différence de degré au plus 2 ne peut avoir trois racines distinctes sans être nulle.