Chapitre 11 – Cours

Polynômes et fractions rationnelles

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Effectuer une division euclidienne
- Étudier racines et multiplicité
- Décomposer une fraction rationnelle

1. Polynômes

Un polynôme sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une somme finie $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Son degré est le plus grand indice de coefficient non nul.

Le polynôme nul a un degré traité par une convention particulière ; il ne faut pas appliquer sans précaution une règle de degré qui suppose des polynômes non nuls.

Pour des facteurs non nuls, $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

2. Division et racines

Pour $B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

La division par $X - a$ laisse le reste $P(a)$; ainsi a est racine si et seulement si $X - a$ divise P.

Une racine est de multiplicité m si $(X - a)^m$ divise P mais pas $(X - a)^{m+1}$.

Avec les dérivées, cela se traduit par l'annulation des dérivées d'ordres inférieurs à m, puis une dérivée d'ordre m non nulle.

3. Factorisation

Un polynôme non nul de degré n possède au plus n racines distinctes.

Sur $\mathbb{C}$, le théorème de d'Alembert-Gauss assure une factorisation en facteurs de degré un.

Sur $\mathbb{R}$, les facteurs irréductibles ont degré un ou deux, les seconds ayant un discriminant négatif.

Des racines complexes non réelles d'un polynôme réel apparaissent par paires conjuguées.

4. Fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est un quotient de polynômes avec dénominateur non nul.

La division extrait une partie polynomiale.

La partie propre peut être décomposée en éléments simples selon les facteurs du dénominateur.

Pour des racines simples réelles, on cherche des termes $A/(X-a)$.

Des facteurs répétés exigent plusieurs puissances du dénominateur.

Les coefficients se trouvent par identification ou en évaluant une identité polynomiale adaptée.

5. Exemple et vigilance

L'identité $1/[(x+1)(x+2)] = 1/(x+1) - 1/(x+2)$ facilite l'intégration et les sommes télescopiques.

Une simplification ne doit pas faire oublier le domaine d'une fonction rationnelle initiale.

Par exemple $(x^2-1)/(x-1) = x+1$ seulement pour $x \neq 1$.

Enfin, vérifier une factorisation par développement et comparer les degrés constituent des contrôles rapides.

La décomposition complète en éléments simples est un approfondissement L1/MPSI ; en PCSI, le cours doit être utilisé selon les limites du programme et les besoins du calcul intégral.

Séparer polynôme formel et fonction

Définition – Évaluation et multiplicité

L'évaluation de $P \in \mathbb{K}[X]$ en $a \in \mathbb{K}$ est le scalaire $P(a)$. Pour $P \neq 0$, une racine simple a multiplicité un ; une racine double a multiplicité deux. Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $P(a) = P'(a) = 0$ caractérise une multiplicité au moins deux.

Propriété – Unicité par les racines

Si deux polynômes de degrés au plus n prennent les mêmes valeurs en $n+1$ points distincts, ils sont égaux. Leur différence a en effet au moins $n+1$ racines ; elle ne peut être non nulle et de degré au plus n. Des valeurs numériques bien choisies prouvent donc une identité lorsque le degré est préalablement contrôlé.

Exemple résolu – 1. Factoriser avec une racine visible

Factorisons $P(X) = X^3 - 3X + 2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $P(1) = 0$, donc $X-1$ divise P. La division donne $P = (X-1)(X^2+X-2)$.
2. Le second facteur vaut $(X-1)(X+2)$, d'où $P = (X-1)^2(X+2)$. Les degrés et le coefficient dominant sont conservés.
3. Contrôler la multiplicité : $P'(1) = 0$, mais $P''(1) = 6 \neq 0$. La racine 1 est double et -2 est simple.

$$P(X) = (X-1)^2(X+2).$$

Le développement redonne le polynôme initial ; le signe ne change pas au passage par la racine double.

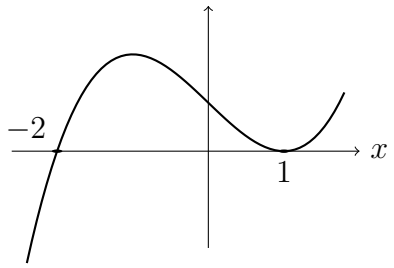
Exemple résolu – 2. Décomposer avant d'intégrer

Décomposons $1/[x(x+1)]$ puis intégrons sur $[1;2]$.

1. Chercher $A/x + B/(x+1)$. Après multiplication par $x(x+1)$, l'identité polynomiale à obtenir est $1 = A(x+1) + Bx$.
2. Évaluer cette identité en $x = 0$ puis en $x = -1$ donne $A = 1$, $B = -1$. Ces évaluations concernent l'identité polynomiale, pas la fraction initiale aux pôles.
3. Sur $[1;2]$, les dénominateurs restent positifs. Les primitives logarithmiques sont donc valides sans franchir de singularité.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} = [\ln x - \ln(x+1)]_1^2 = \ln \frac{4}{3}.$$

Une racine double touche l'axe



Le graphe traverse l'axe à la racine simple -2 et le touche à la racine double 1. La factorisation explique exactement cette différence : le facteur carré reste positif de part et d'autre de 1.

À retenir – Bilan

Une division polynomiale s'accompagne d'un contrôle du reste et des degrés. Une fraction rationnelle s'étudie avec son domaine initial ; une simplification peut permettre un prolongement mais ne réintègre pas automatiquement les points exclus. Après décomposition, remettre au même dénominateur vérifie tous les coefficients.