

Chapitre 12 – Corrections

Matrices et systèmes linéaires

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Produit matriciel

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les matrices sont différentes : la multiplication n'est pas commutative.

Exercice 2 – Produit matriciel

$AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Les matrices sont différentes : la multiplication n'est pas commutative.

Exercice 3 – Produit matriciel

$AB = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$. Les matrices sont différentes : la multiplication n'est pas commutative.

Exercice 4 – Système triangulaire

La seconde équation donne $y = 1$. En reportant, $x = 3 - 1 = 2$. La solution unique est $(2; 1)$.

Exercice 5 – Système triangulaire

La seconde équation donne $y = 1$. En reportant, $x = 4 - 2 = 2$. La solution unique est $(2; 1)$.

Exercice 6 – Système triangulaire

La seconde équation donne $y = 1$. En reportant, $x = 5 - 3 = 2$. La solution unique est $(2; 1)$.

Exercice 7 – Inverse

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les produits dans les deux sens donnent I_2 . Une matrice triangulaire à diagonale non nulle est inversible.

Exercice 8 – Inverse

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les produits dans les deux sens donnent I_2 . Une matrice triangulaire à diagonale non nulle est inversible.

Exercice 9 – Inverse

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les produits dans les deux sens donnent I_2 . Une matrice triangulaire à diagonale non nulle est inversible.

Exercice 10 – Rang

La deuxième ligne vaut deux fois la première, laquelle est non nulle. Après $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, une seule ligne non nulle subsiste : le rang est 1.

Exercice 11 – Rang

La deuxième ligne vaut deux fois la première, laquelle est non nulle. Après $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, une seule ligne non nulle subsiste : le rang est 1.

Exercice 12 – Rang

La deuxième ligne vaut deux fois la première, laquelle est non nulle. Après $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, une seule ligne non nulle subsiste : le rang est 1.

Exercice 13 – Puissance

Écrire $A = I + N$ avec $N^2 = 0$. Le binôme, valide ici puisque I commute avec N , donne $A^2 = I + 2N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 – Puissance

Écrire $A = I + N$ avec $N^2 = 0$. Le binôme, valide ici puisque I commute avec N , donne $A^3 = I + 3N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 – Puissance

Écrire $A = I + N$ avec $N^2 = 0$. Le binôme, valide ici puisque I commute avec N , donne $A^5 = I + 5N = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 – Approfondissement : paramètre

Par différence, $(a-1)y = 1$. Si $a \neq 1$, $y = 1/(a-1)$ et $x = (a-2)/(a-1)$. Si $a = 1$, les mêmes membres gauches seraient égaux à 1 et 2 : aucune solution.

Exercice 17 – Approfondissement : noyau

Le système $AX = 0$ donne $y = -z$, puis $x = -z$. Ainsi le noyau est $\{t(-1; -1; 1) : t \in \mathbb{R}\}$, droite vectorielle.

Exercice 18 – Approfondissement : Gauss

Soustraire la deuxième à la première donne $2y = 4$, soit $y = 2$. Soustraire la troisième à la première donne $2z = 6$, soit $z = 3$. Puis $x = 1$. La solution est $(1; 2; 3)$.

Exercice 19 – Approfondissement : matrices nilpotentes

La matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $N^2 = 0$ et $N \neq 0$. Si elle était inversible, multiplier $N^2 = 0$ par N^{-1} donnerait $N = 0$, contradiction.

Exercice 20 – Approfondissement : trace

$\text{tr}(AB) = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji}$. Échanger les deux sommes finies et les noms des indices donne $\sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} = \text{tr}(BA)$. Cela ne signifie pas que $AB = BA$.