

Chapitre 13 – Corrections

Espaces vectoriels et dimension

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Sous-espace

On écrit $F = \{t(1, 1) : t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1))$. Cette droite contient zéro et est stable par combinaisons linéaires. Le vecteur générateur non nul est une base ; la dimension vaut 1.

Exercice 2 – Sous-espace

On écrit $F = \{t(1, 2) : t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 2))$. Cette droite contient zéro et est stable par combinaisons linéaires. Le vecteur générateur non nul est une base ; la dimension vaut 1.

Exercice 3 – Sous-espace

On écrit $F = \{t(1, 3) : t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 3))$. Cette droite contient zéro et est stable par combinaisons linéaires. Le vecteur générateur non nul est une base ; la dimension vaut 1.

Exercice 4 – Famille libre

L'égalité $\lambda(1, 1) + \mu(0, 1) = 0$ donne $\lambda = 0$, puis $\mu = 0$. La famille est libre de deux vecteurs dans un espace de dimension deux : c'est une base.

Exercice 5 – Famille libre

L'égalité $\lambda(1, 2) + \mu(0, 1) = 0$ donne $\lambda = 0$, puis $\mu = 0$. La famille est libre de deux vecteurs dans un espace de dimension deux : c'est une base.

Exercice 6 – Famille libre

L'égalité $\lambda(1, 3) + \mu(0, 1) = 0$ donne $\lambda = 0$, puis $\mu = 0$. La famille est libre de deux vecteurs dans un espace de dimension deux : c'est une base.

Exercice 7 – Coordonnées

$\alpha(1, 1) + \beta(0, 1) = (3, 5)$ donne $\alpha = 3$ puis $1\alpha + \beta = 5$, d'où $\beta = 2$. Les coordonnées sont $(3; 2)$ dans cette base, pas dans la base canonique.

Exercice 8 – Coordonnées

$\alpha(1, 2) + \beta(0, 1) = (3, 8)$ donne $\alpha = 3$ puis $2\alpha + \beta = 8$, d'où $\beta = 2$. Les coordonnées sont $(3; 2)$ dans cette base, pas dans la base canonique.

Exercice 9 – Coordonnées

$\alpha(1, 3) + \beta(0, 1) = (3, 11)$ donne $\alpha = 3$ puis $3\alpha + \beta = 11$, d'où $\beta = 2$. Les coordonnées sont $(3; 2)$ dans cette base, pas dans la base canonique.

Exercice 10 – Hyperplan

On pose $y = s$, $z = t$, donc $x = -1s - t$. Ainsi $F = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Ces vecteurs sont libres en examinant les deuxième et troisième coordonnées ; la dimension vaut 2.

Exercice 11 – Hyperplan

On pose $y = s$, $z = t$, donc $x = -2s - t$. Ainsi $F = \text{Vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Ces vecteurs sont libres en examinant les deuxième et troisième coordonnées ; la dimension vaut 2.

Exercice 12 – Hyperplan

On pose $y = s$, $z = t$, donc $x = -4s - t$. Ainsi $F = \text{Vect}((-4, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Ces vecteurs sont libres en examinant les deuxième et troisième coordonnées ; la dimension vaut 2.

Exercice 13 – Polynômes

La famille $(1, X, \dots, X^2)$ est génératrice par définition d'un polynôme, et libre par unicité des coefficients. La dimension vaut 3.

Exercice 14 – Polynômes

La famille $(1, X, \dots, X^3)$ est génératrice par définition d'un polynôme, et libre par unicité des coefficients. La dimension vaut 4.

Exercice 15 – Polynômes

La famille $(1, X, \dots, X^4)$ est génératrice par définition d'un polynôme, et libre par unicité des coefficients. La dimension vaut 5.

Exercice 16 – Approfondissement : somme directe

Tout (x, y) vaut $[(x+y)/2](1, 1) + [(x-y)/2](1, -1)$. L'égalité des deux directions n'est possible que pour le vecteur nul ; la décomposition est donc unique.

Exercice 17 – Approfondissement : réunion

Non. Les deux axes de $\mathbb{R}^2$ sont des sous-espaces, mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ n'appartient pas à leur réunion. Leur somme est en revanche tout le plan.

Exercice 18 – Approfondissement : dimension

Non : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \leq 3$, donc $4 - \dim(F \cap G) \leq 3$. Leur intersection a dimension au moins 1.

Exercice 19 – Approfondissement : compléter une base

Choisir $w = (0, 0, 1)$. Si $au + bv + cw = 0$, la première coordonnée donne $a = 0$, la deuxième $b = 0$, la troisième $c = 0$. La famille de trois vecteurs est une base.

Exercice 20 – Approfondissement : espace de fonctions

Si $a + bx + cx^2 = 0$ pour tout réel x , le polynôme a une infinité de racines, donc est nul. Tous ses coefficients sont nuls. Une famille de fonctions se teste par une identité vraie pour tous les arguments.