

Chapitre 13 – Cours

Espaces vectoriels et dimension

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Reconnaître un sous-espace
- Construire une base et des coordonnées
- Utiliser une formule de dimension

1. Combinaisons linéaires

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par les scalaires vérifiant les règles usuelles.

Les exemples comprennent $\mathbb{R}^n$, les polynômes, les matrices, les fonctions et les suites.

Une combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_p$ est une somme $\sum_i \lambda_i v_i$.

L'ensemble de ces combinaisons, noté $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$, est un sous-espace.

2. Sous-espaces

Pour montrer qu'une partie est un sous-espace, on vérifie qu'elle contient zéro et qu'elle est stable par combinaison linéaire.

Une équation linéaire homogène définit un sous-espace ; une équation avec un second membre non nul définit généralement une partie affine et pas un sous-espace.

Une intersection de sous-espaces est un sous-espace.

Une réunion ne l'est pas en général.

3. Liberté et génération

Une famille est libre si la seule combinaison donnant zéro a tous ses coefficients nuls.

Elle est génératrice si toute valeur de l'espace est une combinaison de ses éléments.

Une base possède les deux propriétés.

Chaque vecteur admet alors des coordonnées uniques.

La base dépend du choix des vecteurs ; les coordonnées d'un même objet changent avec la base.

4. Dimension finie

Toutes les bases d'un espace de dimension finie ont le même nombre d'éléments.

Dans un espace de dimension n , une famille libre possède au plus n éléments et peut être complétée en une base.

Une famille génératrice peut être réduite à une base.

Une famille de n vecteurs est une base dès qu'elle est libre, ou dès qu'elle est génératrice.

5. Sommes et exemple

La somme $F + G$ rassemble les sommes d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

Elle est directe si $F \cap G = \{0\}$; les décompositions sont alors uniques.

En dimension finie, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Dans $\mathbb{R}^3$, le plan $x + y + z = 0$ a pour base $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$.

Un paramétrage donne la génération ; comparer les coordonnées prouve la liberté.

Ces deux étapes doivent figurer dans une justification complète de base.

Des coordonnées existent après le choix d'une base

Définition – Sous-espace engendré et base

L'espace engendré par une famille est le plus petit sous-espace qui contient ses vecteurs. Une base est une famille libre et génératrice : la génération assure l'existence de coordonnées, la liberté leur unicité. Les deux propriétés correspondent donc à deux questions distinctes.

Propriété – Une union n'est pas une somme

Les deux axes de $\mathbb{R}^2$ sont des sous-espaces, mais leur réunion ne l'est pas : $(1, 0)$ et $(0, 1)$ y appartiennent tandis que leur somme $(1, 1)$ n'y appartient pas. Leur somme vectorielle est au contraire tout $\mathbb{R}^2$. Une union autorise un choix entre deux ensembles ; une somme autorise l'addition de leurs vecteurs.

Exemple résolu – 1. Construire une base d'un plan

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

1. C'est le noyau d'une équation linéaire homogène, donc un sous-espace. Résoudre l'équation donne $x = -y - z$.
2. Écrire $(x, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$. Les vecteurs $u = (-1, 1, 0)$ et $v = (-1, 0, 1)$ engendrent donc F .
3. Si $au + bv = 0$, la deuxième coordonnée donne $a = 0$ et la troisième $b = 0$. La famille est libre : (u, v) est une base et $\dim F = 2$.

Par exemple, $(1, 2, -3) = 2u - 3v$; ses coordonnées dans cette base sont $(2, -3)$.

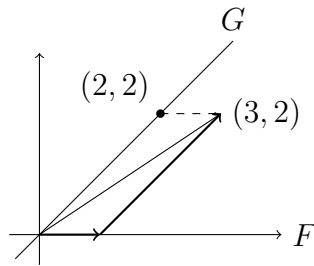
Exemple résolu – 2. Comprendre une somme directe

Dans $\mathbb{R}^2$, posons $F = \text{Vect}(1, 0)$ et $G = \text{Vect}(1, 1)$.

1. Un vecteur de l'intersection s'écrit $(a, 0) = (b, b)$. La deuxième coordonnée impose $b = 0$, puis $a = 0$, donc $F \cap G = \{0\}$.
2. Pour tout (x, y) , chercher $(x, y) = \alpha(1, 0) + \beta(1, 1)$ donne $\beta = y$ et $\alpha = x - y$. La somme est tout $\mathbb{R}^2$.
3. Ces coefficients sont uniques : on a donc $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$. La décomposition est adaptée à ces directions et ne correspond pas forcément aux coordonnées canoniques.

Pour $(3, 2)$, les deux composantes sont $(1, 0)$ et $(2, 2)$.

Deux directions qui décomposent le plan



Le chemin brisé additionne un vecteur de F et un vecteur parallèle à G . Les deux directions sont indépendantes ; elles ne sont pas orthogonales. La somme directe ne demande aucune notion de longueur ou d'angle.

À retenir – Bilan

Tester d'abord que zéro appartient à un candidat sous-espace. Pour une base obtenue par paramétrage, donner explicitement la génération puis vérifier l'indépendance des paramètres. En dimension finie, le comptage des vecteurs permet ensuite de raccourcir certaines preuves, à condition de connaître déjà la dimension de l'espace.
