

Chapitre 14 – Corrections

Applications linéaires et changements de base

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Linéarité

Chaque composante est une combinaison linéaire homogène de x, y , donc f préserve les combinaisons linéaires. Les images des vecteurs canoniques sont $(1, 0)$ et $(1, 1)$; la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 – Linéarité

Chaque composante est une combinaison linéaire homogène de x, y , donc f préserve les combinaisons linéaires. Les images des vecteurs canoniques sont $(1, 0)$ et $(2, 1)$; la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 – Linéarité

Chaque composante est une combinaison linéaire homogène de x, y , donc f préserve les combinaisons linéaires. Les images des vecteurs canoniques sont $(1, 0)$ et $(3, 1)$; la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 – Noyau et image

Le noyau est $\{t(-1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$, de dimension 1. L'image vaut $\mathbb{R}$ car $f(t, 0) = t$. Le rang vaut 1, et $\dim \ker f + \operatorname{rg} f = 2$.

Exercice 5 – Noyau et image

Le noyau est $\{t(-2, 1) : t \in \mathbb{R}\}$, de dimension 1. L'image vaut $\mathbb{R}$ car $f(t, 0) = t$. Le rang vaut 1, et $\dim \ker f + \operatorname{rg} f = 2$.

Exercice 6 – Noyau et image

Le noyau est $\{t(-4, 1) : t \in \mathbb{R}\}$, de dimension 1. L'image vaut $\mathbb{R}$ car $f(t, 0) = t$. Le rang vaut 1, et $\dim \ker f + \operatorname{rg} f = 2$.

Exercice 7 – Projection

$p(p(x, y)) = p(x + 1y, 0) = (x + 1y, 0) = p(x, y)$. L'image est l'axe des abscisses, le noyau est la droite $x + 1y = 0$. Ce n'est généralement pas une projection orthogonale.

Exercice 8 – Projection

$p(p(x, y)) = p(x + 2y, 0) = (x + 2y, 0) = p(x, y)$. L'image est l'axe des abscisses, le noyau est la droite $x + 2y = 0$. Ce n'est généralement pas une projection orthogonale.

Exercice 9 – Projection

$p(p(x, y)) = p(x + 3y, 0) = (x + 3y, 0) = p(x, y)$. L'image est l'axe des abscisses, le noyau est la droite $x + 3y = 0$. Ce n'est généralement pas une projection orthogonale.

Exercice 10 – Matrice de dérivation

Le noyau est l'espace des polynômes constants, de dimension 1. Tout polynôme du codomaine possède une primitive dans le domaine : D est surjective, de rang 2. Le théorème du rang donne $3 = 1 + 2$.

Exercice 11 – Matrice de dérivation

Le noyau est l'espace des polynômes constants, de dimension 1. Tout polynôme du codomaine possède une primitive dans le domaine : D est surjective, de rang 3. Le théorème du rang donne $4 = 1 + 3$.

Exercice 12 – Matrice de dérivation

Le noyau est l'espace des polynômes constants, de dimension 1. Tout polynôme du codomaine possède une primitive dans le domaine : D est surjective, de rang 4. Le théorème du rang donne $5 = 1 + 4$.

Exercice 13 – Changement de base

Les colonnes de P sont les vecteurs de B : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Son inverse est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $[v]_{\text{can}} = P[v]_B$.

Exercice 14 – Changement de base

Les colonnes de P sont les vecteurs de B : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Son inverse est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $[v]_{\text{can}} = P[v]_B$.

Exercice 15 – Changement de base

Les colonnes de P sont les vecteurs de B : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Son inverse est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $[v]_{\text{can}} = P[v]_B$.

Exercice 16 – Approfondissement : rang

Le rang est au plus 3, donc la dimension du noyau est au moins 2 : pas d'injectivité. La surjectivité est possible, par exemple avec la projection sur les trois premières coordonnées.

Exercice 17 – Approfondissement : endomorphisme

Le noyau nul donne, par le théorème du rang, un rang égal à la dimension du domaine. Domaine et codomaine ont même dimension ; l'image est donc tout l'espace. La dimension finie est essentielle.

Exercice 18 – Approfondissement : symétrie

$s^2 = 4p^2 - 4p + I = I$ car $p^2 = p$. Ainsi s est une symétrie, égale à I sur l'image de p et à $-I$ sur son noyau.

Exercice 19 – Approfondissement : composition

Si $f(x) = 0$, alors $g(f(x)) = g(0) = 0$. Toute valeur $g(f(x))$ est par définition une image par g . Ces inclusions impliquent notamment que le rang d'une composition ne dépasse aucun des deux rangs en dimension finie.

Exercice 20 – Approfondissement : translation

Une application linéaire doit envoyer zéro sur zéro. Or $T_v(0) = v$. Elle n'est donc linéaire que si $v = 0$, auquel cas elle est l'identité. Une transformation affine n'est pas nécessairement linéaire.