

Chapitre 14 – Cours

Applications linéaires et changements de base

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Déterminer noyau et image
- Appliquer le théorème du rang
- Relier une application à ses matrices

1. Définition

Une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire si $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

Elle envoie nécessairement zéro sur zéro.

Sa connaissance sur une base détermine entièrement l'application, car chaque vecteur est une combinaison unique des vecteurs de base.

Une translation non triviale n'est pas linéaire, contrairement à une rotation autour de l'origine.

2. Noyau et image

Le noyau $\ker f = \{x : f(x) = 0\}$ et l'image $\operatorname{Im} f = \{f(x) : x \in E\}$ sont des sous-espaces.

Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.

Elle est surjective si et seulement si son image est le codomaine.

Calculer une image revient souvent à étudier les images des vecteurs d'une base.

3. Théorème du rang

Si E est de dimension finie, $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$.

La démonstration consiste à compléter une base du noyau en une base de E ; les images des vecteurs ajoutés forment une base de l'image.

Pour un endomorphisme d'un espace de dimension finie, injectivité, surjectivité et bijectivité sont équivalentes.

Cette propriété ne se transpose pas sans précaution aux espaces de dimension infinie.

4. Matrices

Les colonnes de la matrice de f sont les coordonnées des images des vecteurs de la base de départ, dans la base d'arrivée.

Une composition correspond à un produit de matrices dans le bon ordre.

Si P transforme les coordonnées d'une nouvelle base vers l'ancienne, la matrice d'un endomorphisme dans la nouvelle base vaut $P^{-1}AP$.

Deux matrices ainsi reliées sont semblables : elles représentent le même endomorphisme.

5. Projections et exemple

Une projection satisfait $p^2 = p$.

L'espace se décompose en somme directe de son noyau et de son image.

Une symétrie satisfait $s^2 = I$ et s'obtient avec $s = 2p - I$.

Pour $f(x, y) = x + 2y$, le noyau est la droite engendrée par $(-2, 1)$ et l'image est $\mathbb{R}$; le rang vaut un.

Le bilan dimensionnel $2 = 1 + 1$ confirme le résultat.

La présence d'un paramétrage ne suffit pas à prouver une base : il faut aussi justifier liberté et génération.

Associer une matrice à des bases précises

Définition – Endomorphisme et isomorphisme

Un endomorphisme est une application linéaire d'un espace dans lui-même. Un isomorphisme est une application linéaire bijective ; sa réciproque est alors linéaire. Deux espaces de dimension finie sur le même corps sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

Propriété – Matrice et composition

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont linéaires, avec bases fixées et la même base intermédiaire de F , alors

$$\text{Mat}(g \circ f) = \text{Mat}(g) \text{Mat}(f).$$

Le vecteur de coordonnées est d'abord multiplié par la matrice de f , puis par celle de g . L'ordre des matrices suit cette action ; il ne se déduit pas de leur proximité dans une phrase.

Exemple résolu – 1. Calculer noyau, image et rang

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$.

1. Les deux coordonnées sont des expressions linéaires homogènes, donc f est linéaire. Le noyau satisfait $x = -y$ et $z = -y$.
2. Il vient $\ker f = \text{Vect}(-1, 1, -1)$, de dimension un. Le théorème du rang donne alors $\dim \text{Im } f = 3 - 1 = 2$.
3. Puisque le codomaine a dimension deux, f est surjective. On peut aussi construire un antécédent de (a, b) : $(a, 0, b)$ convient.

L'application n'est pas injective ; ajouter un vecteur du noyau à un antécédent conserve son image.

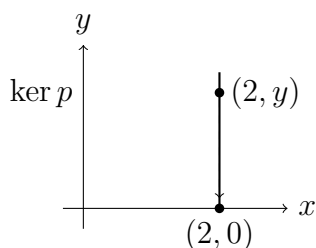
Exemple résolu – 2. Changer de base sans inverser la convention

Dans $\mathbb{R}^2$, soit $f(x, y) = (2x, 3y)$ et la nouvelle base $u = (1, 1)$, $v = (0, 1)$.

1. Les colonnes des nouveaux vecteurs dans l'ancienne base donnent $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $X_{\text{ancien}} = PX_{\text{nouveau}}$.
2. Exprimer directement les images : $f(u) = (2, 3) = 2u + v$ et $f(v) = (0, 3) = 3v$.
3. La nouvelle matrice est donc $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Le calcul $P^{-1} \text{diag}(2, 3)P$ donne la même matrice.

Les colonnes décrivent les images des vecteurs de départ, et les coordonnées sont prises dans la base d'arrivée.

Un noyau fait perdre une direction



Pour la projection $p(x, y) = (x, 0)$, tous les points d'une même verticale ont la même image. Le noyau est l'axe vertical et l'image l'axe horizontal ; le rang vaut un et $p^2 = p$.

À retenir – Bilan

Le noyau mesure le défaut d'injectivité et l'image mesure les valeurs atteintes. Le rang relie ces deux informations lorsque l'espace de départ a dimension finie. Dans un changement de base, écrire d'abord la relation entre les colonnes de coordonnées fixe sans ambiguïté la place de P et de P^{-1} .
