

## Chapitre 14 – Exercices

Applications linéaires et changements de base

20 exercices progressifs

### Exercice 1 – Linéarité

Montrer que  $f(x, y) = (x + 1y, y)$  est linéaire et écrire sa matrice canonique.

### Exercice 2 – Linéarité

Montrer que  $f(x, y) = (x + 2y, y)$  est linéaire et écrire sa matrice canonique.

### Exercice 3 – Linéarité

Montrer que  $f(x, y) = (x + 3y, y)$  est linéaire et écrire sa matrice canonique.

### Exercice 4 – Noyau et image

Étudier  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x + 1y$ .

### Exercice 5 – Noyau et image

Étudier  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x + 2y$ .

### Exercice 6 – Noyau et image

Étudier  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x + 4y$ .

### Exercice 7 – Projection

Pour  $p(x, y) = (x + 1y, 0)$ , vérifier  $p^2 = p$  et préciser noyau et image.

### Exercice 8 – Projection

Pour  $p(x, y) = (x + 2y, 0)$ , vérifier  $p^2 = p$  et préciser noyau et image.

### Exercice 9 – Projection

Pour  $p(x, y) = (x + 3y, 0)$ , vérifier  $p^2 = p$  et préciser noyau et image.

### Exercice 10 – Matrice de dérivation

Donner le rang et le noyau de la dérivation  $D : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X]$ .

**Exercice 11 – Matrice de dérivation**

Donner le rang et le noyau de la dérivation  $D : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ .

**Exercice 12 – Matrice de dérivation**

Donner le rang et le noyau de la dérivation  $D : \mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ .

**Exercice 13 – Changement de base**

Pour la base  $B = ((1, 1), (0, 1))$ , donner la matrice  $P$  de passage vers les coordonnées canoniques et son inverse.

**Exercice 14 – Changement de base**

Pour la base  $B = ((1, 2), (0, 1))$ , donner la matrice  $P$  de passage vers les coordonnées canoniques et son inverse.

**Exercice 15 – Changement de base**

Pour la base  $B = ((1, 3), (0, 1))$ , donner la matrice  $P$  de passage vers les coordonnées canoniques et son inverse.

**Exercice 16 – Approfondissement : rang**

Une application linéaire  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est-elle injective ? Peut-elle être surjective ?

**Exercice 17 – Approfondissement : endomorphisme**

En dimension finie, prouver qu'un endomorphisme injectif est surjectif.

**Exercice 18 – Approfondissement : symétrie**

Pour une projection  $p$ , montrer que  $s = 2p - I$  vérifie  $s^2 = I$ .

**Exercice 19 – Approfondissement : composition**

Prouver  $\ker f \subset \ker(g \circ f)$  et  $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ .

**Exercice 20 – Approfondissement : translation**

Une translation  $T_v : x \mapsto x + v$  est-elle linéaire ?