Chapitre 15 – Corrections

Déterminants et inversibilité

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Déterminant deux par deux

Le déterminant vaut $1 \times (2) - 2 \times 1 = 0$. La matrice est non inversible car ce nombre est nul.

Exercice 2 – Déterminant deux par deux

Le déterminant vaut $1 \times (3) - 2 \times 2 = -1$. La matrice est inversible car ce nombre est non nul.

Exercice 3 – Déterminant deux par deux

Le déterminant vaut $1 \times (4) - 2 \times 3 = -2$. La matrice est inversible car ce nombre est non nul.

Exercice 4 – Matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients diagonaux : $2 \times 2 \times (-1) = -4$. Les coefficients au-dessus de la diagonale n'interviennent pas.

Exercice 5 – Matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients diagonaux : $3 \times 2 \times (-1) = -6$. Les coefficients au-dessus de la diagonale n'interviennent pas.

Exercice 6 – Matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients diagonaux : $4 \times 2 \times (-1) = -8$. Les coefficients au-dessus de la diagonale n'interviennent pas.

Exercice 7 – Paramètre

Son déterminant est $1 - 1t$. Elle est inversible si et seulement si $t \neq 1/1$. Au paramètre exclu, les colonnes sont liées.

Exercice 8 – Paramètre

Son déterminant est $1 - 2t$. Elle est inversible si et seulement si $t \neq 1/2$. Au paramètre exclu, les colonnes sont liées.

Exercice 9 – Paramètre

Son déterminant est $1 - 3t$. Elle est inversible si et seulement si $t \neq 1/3$. Au paramètre exclu, les colonnes sont liées.

Exercice 10 – Produit et inverse

La multiplicativité donne $\det(A^2) = 4$. Le déterminant est non nul, donc l'inverse existe et son déterminant vaut $1/2$.

Exercice 11 – Produit et inverse

La multiplicativité donne $\det(A^2) = 9$. Le déterminant est non nul, donc l'inverse existe et son déterminant vaut $1/3$.

Exercice 12 – Produit et inverse

La multiplicativité donne $\det(A^2) = 25$. Le déterminant est non nul, donc l'inverse existe et son déterminant vaut $1/5$.

Exercice 13 – Opérations élémentaires

Effectuer $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ ne change pas le déterminant. La matrice devient triangulaire avec diagonale $1, 1, 3$, donc le déterminant vaut 3.

Exercice 14 – Opérations élémentaires

Effectuer $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ ne change pas le déterminant. La matrice devient triangulaire avec diagonale $1, 1, 3$, donc le déterminant vaut 3.

Exercice 15 – Opérations élémentaires

Effectuer $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ ne change pas le déterminant. La matrice devient triangulaire avec diagonale $1, 1, 3$, donc le déterminant vaut 3.

Exercice 16 – Approfondissement : Vandermonde

Soustraire la première ligne aux deux autres permet de factoriser $b-a$ et $c-a$. Le déterminant restant vaut $c - b$. Le résultat est $(b - a)(c - a)(c - b)$.

Exercice 17 – Approfondissement : dépendance

Le déterminant est alterné : échanger ces colonnes change son signe mais laisse la matrice identique. Il est donc égal à son opposé, et vaut zéro sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 18 – Approfondissement : similitude

Si $B = P^{-1}AP$, la multiplicativité donne $\det B = \det(P)^{-1} \det(A) \det(P) = \det A$. Il s'agit d'un invariant de l'endomorphisme.

Exercice 19 – Approfondissement : transposition

Si $A^T = -A$ et l'ordre est n impair, $\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$. Donc $\det A = 0$: elle n'est pas inversible.

Exercice 20 – Approfondissement : aire

Le déterminant vaut $2 \times 3 - 1 \times 1 = 5$. Son module est l'aire du parallélogramme engendré par les deux vecteurs ; son signe positif indique leur orientation directe.