

Chapitre 15 – Cours

Déterminants et inversibilité

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Calculer un déterminant
- Exploiter ses propriétés
- Relier déterminant et indépendance

1. Définition et sens

Le déterminant est une application multilinéaire alternée des colonnes d'une matrice carrée, normalisée par $\det I = 1$.

En dimension deux, $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

Son module représente une aire orientée oubliée en valeur absolue, et en dimension trois un volume.

Un déterminant n'est défini que pour une matrice carrée.

2. Opérations

Échanger deux lignes change le signe du déterminant.

Multiplier une ligne par un scalaire multiplie le déterminant par ce scalaire.

Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ne change pas sa valeur.

Ces propriétés permettent de faire apparaître des zéros et de réduire à une matrice triangulaire.

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients diagonaux.

3. Développement

On peut développer suivant une ligne ou une colonne à l'aide des cofacteurs.

Les signes alternent selon $(-1)^{i+j}$.

Cette technique est efficace lorsque de nombreux coefficients sont nuls ; pour une grande matrice, le pivot est généralement préférable.

La règle de Sarrus ne s'applique qu'aux matrices trois par trois, pas aux ordres supérieurs.

4. Théorèmes

Le déterminant est multiplicatif : $\det(AB) = \det A \det B$.

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Alors $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

La transposition préserve le déterminant.

Une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n est une base si et seulement si le déterminant de sa matrice dans une base fixée est non nul.

5. Exemple et erreurs

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 1 - 2t$.

La matrice est inversible exactement lorsque $t \neq 1/2$.

Le calcul fournit ainsi une classification complète selon le paramètre.

Il ne faut pas confondre linéarité par rapport à chaque colonne avec une fausse égalité $\det(A+B) = \det A + \det B$.

De même, pour une matrice d'ordre n , $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, car les n colonnes sont multipliées.

Le signe et la puissance sont des contrôles essentiels.

Le déterminant mesure une déformation orientée

Définition – Dépendance des colonnes

Un déterminant est nul dès que ses colonnes sont linéairement dépendantes. En particulier, deux colonnes égales ou proportionnelles donnent zéro. En dimension deux, les colonnes sont les deux côtés d'un parallélogramme : l'aire géométrique est la valeur absolue du déterminant.

Propriété – Effet d'une homothétie

Pour une matrice carrée A d'ordre n et un scalaire λ ,

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

Chaque colonne reçoit un facteur λ et la multilinéarité extrait les n facteurs. En dimension deux, doubler toutes les longueurs multiplie l'aire par quatre ; en dimension trois, le volume est multiplié par huit.

Exemple résolu – 1. Réduire avant de développer

Calculons le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Faire $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. Ces opérations ne changent pas le déterminant.
2. Les lignes deviennent $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ et $(0, 1, 2)$. Faire ensuite $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne une matrice triangulaire.
3. Le produit des termes diagonaux vaut $1 \times 1 \times 1 = 1$. Ainsi $\det A = 1$, et A est inversible.

Aucun échange ni multiplication de ligne n'a été utilisé : il n'y a donc aucun signe ou facteur à corriger.

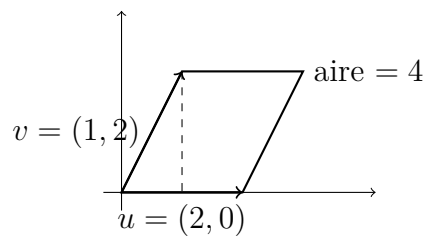
Exemple résolu – 2. Une famille dépend d'un paramètre

Pour quels réels t les vecteurs $u = (1, 2)$ et $v = (t, 1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?

1. Placer les vecteurs en colonnes : $M = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. La famille a deux éléments dans un espace de dimension deux.
2. Calculer $\det M = 1 - 2t$. Le critère de base donne donc $t \neq 1/2$.
3. Au cas exceptionnel $t = 1/2$, on vérifie $v = u/2$. Les vecteurs sont colinéaires ; l'aire du parallélogramme est nulle et la famille ne peut engendrer le plan.

Les autres valeurs donnent une aire $|1 - 2t|$, dont le signe avant valeur absolue indique l'orientation.

L'aire donnée par deux colonnes



La base a longueur 2 et la hauteur vaut 2, donc l'aire vaut 4. On retrouve $\det(u, v) = 2 \times 2 - 0 \times 1 = 4$. Échanger les colonnes inverse l'orientation, tout en conservant cette aire géométrique.

À retenir – Bilan

Le déterminant se calcule sur une matrice carrée. Choisir entre réduction et développement selon les zéros disponibles, puis suivre chaque effet des opérations de lignes. Un déterminant non nul donne une décision d'inversibilité ; il ne fournit pas à lui seul tous les coefficients de l'inverse.
