

Chapitre 16 – Corrections

Espaces euclidiens et projections

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Produit scalaire

$\langle u, v \rangle = 1 + 1 - 2 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux car le produit vaut zéro.

Exercice 2 – Produit scalaire

$\langle u, v \rangle = 2 + 2 - 2 = 2$. Les vecteurs sont non orthogonaux car le produit est non nul.

Exercice 3 – Produit scalaire

$\langle u, v \rangle = 3 + 3 - 2 = 4$. Les vecteurs sont non orthogonaux car le produit est non nul.

Exercice 4 – Projection sur une droite

$p(x) = \langle x, u \rangle u / \langle u, u \rangle = (2/2)(1, 1)$. Le résidu $x - p(x)$ a des coordonnées opposées, donc est orthogonal à u .

Exercice 5 – Projection sur une droite

$p(x) = \langle x, u \rangle u / \langle u, u \rangle = (3/2)(1, 1)$. Le résidu $x - p(x)$ a des coordonnées opposées, donc est orthogonal à u .

Exercice 6 – Projection sur une droite

$p(x) = \langle x, u \rangle u / \langle u, u \rangle = (4/2)(1, 1)$. Le résidu $x - p(x)$ a des coordonnées opposées, donc est orthogonal à u .

Exercice 7 – Distance à un plan

Un vecteur normal est $n = (1, 1, 1)$, de norme $\sqrt{3}$. La distance vaut $|\langle A, n \rangle| / \|n\| = 1/\sqrt{3}$. Le projeté est $A - (1/3)n$.

Exercice 8 – Distance à un plan

Un vecteur normal est $n = (1, 1, 1)$, de norme $\sqrt{3}$. La distance vaut $|\langle A, n \rangle| / \|n\| = 2/\sqrt{3}$. Le projeté est $A - (2/3)n$.

Exercice 9 – Distance à un plan

Un vecteur normal est $n = (1, 1, 1)$, de norme $\sqrt{3}$. La distance vaut $|\langle A, n \rangle| / \|n\| = 4/\sqrt{3}$. Le projeté est $A - (4/3)n$.

Exercice 10 – Norme et normalisation

La norme vaut 5×1 car $1 > 0$. Le vecteur unitaire est donc $(3/5, 4/5)$, indépendant du facteur positif initial.

Exercice 11 – Norme et normalisation

La norme vaut 5×2 car $2 > 0$. Le vecteur unitaire est donc $(3/5, 4/5)$, indépendant du facteur positif initial.

Exercice 12 – Norme et normalisation

La norme vaut 5×3 car $3 > 0$. Le vecteur unitaire est donc $(3/5, 4/5)$, indépendant du facteur positif initial.

Exercice 13 – Produit scalaire intégral

Le produit vaut $\frac{1}{2}$. Les normes valent $\sqrt{1}$ et $\sqrt{\frac{1}{3}}$, car les carrés des normes sont les intégrales de 1 et x^2 .

Exercice 14 – Produit scalaire intégral

Le produit vaut 2. Les normes valent $\sqrt{2}$ et $\sqrt{\frac{8}{3}}$, car les carrés des normes sont les intégrales de 1 et x^2 .

Exercice 15 – Produit scalaire intégral

Le produit vaut $\frac{9}{2}$. Les normes valent $\sqrt{3}$ et $\sqrt{9}$, car les carrés des normes sont les intégrales de 1 et x^2 .

Exercice 16 – Approfondissement : Gram-Schmidt

$e_1 = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$. Retirer à $v = (1, 0, 1)$ sa projection sur e_1 donne $(1/2, -1/2, 1)$, de norme $\sqrt{6}/2$. Ainsi $e_2 = (1, -1, 2)/\sqrt{6}$. Le produit scalaire des deux vecteurs normalisés est nul.

Exercice 17 – Approfondissement : Cauchy-Schwarz

Si $v = 0$, c'est immédiat. Sinon, la positivité de $\|u - tv\|^2$ pour $t = \langle u, v \rangle / \|v\|^2$ donne $\|u\|^2 - \langle u, v \rangle^2 / \|v\|^2 \geq 0$, d'où le résultat. L'égalité caractérise la colinéarité.

Exercice 18 – Approfondissement : distance minimale

Pour $y \in F$, les vecteurs $x - p$ et $p - y$ sont orthogonaux. Pythagore donne $\|x - y\|^2 = \|x - p\|^2 + \|p - y\|^2 \geq \|x - p\|^2$, avec égalité uniquement si $y = p$.

Exercice 19 – Approfondissement : base orthonormée

$x = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i$; les coefficients sont obtenus en prenant le produit scalaire avec chaque e_j . Par Pythagore, $\|x\|^2 = \sum_i \langle x, e_i \rangle^2$.

Exercice 20 – Approfondissement : polynômes orthogonaux

La première intégrale est celle d'une fonction impaire, donc nulle. Écrire $P = X^2 + aX + b$. L'orthogonalité avec X donne $a = 0$, celle avec 1 donne $2/3 + 2b = 0$. Ainsi $P = X^2 - 1/3$.