Chapitre 16 – Cours

Espaces euclidiens et projections

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Calculer un produit scalaire et une norme
- Construire une base orthonormée
- Minimiser une distance par projection

1. Produit scalaire réel

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive : $\langle x, x\rangle \geq 0$, avec égalité seulement pour $x = 0$.

Dans $\mathbb{R}^n$, le produit canonique est la somme des produits des coordonnées.

Sur des fonctions continues, une intégrale de produit sur un segment non réduit fournit aussi un produit scalaire, à condition de travailler dans un espace où l'annulation intégrale d'un carré implique la fonction nulle.

2. Norme et inégalités

La norme associée est $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Cauchy-Schwarz assure $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, avec égalité si les vecteurs sont colinéaires.

La démonstration étudie le polynôme positif $\|x - ty\|^2$.

On en déduit l'inégalité triangulaire et le contrôle de nombreux calculs de sommes ou d'intégrales.

3. Orthogonalité

Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Une famille orthonormée ajoute la condition de norme un.

L'algorithme de Gram-Schmidt retire successivement les projections sur les directions déjà obtenues, puis normalise le résidu.

Il exige au départ une famille libre, sinon un résidu peut être nul.

4. Projection

Sur un sous-espace F de dimension finie, chaque vecteur admet une décomposition unique $x = p_F(x) + r$ avec $p_F(x) \in F$ et $r \perp F$.

Dans une base orthonormée (e_i) de F, $p_F(x) = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i$.

Le projeté est l'unique point de F minimisant la distance à x, grâce au théorème de Pythagore appliqué au résidu.

5. Exemple et contrôle

Projeter $(2, 0)$ sur la droite engendrée par $(1, 1)$ donne $(1, 1)$, car le coefficient de projection vaut $2/2 = 1$.

Le résidu $(1, -1)$ est bien orthogonal à $(1, 1)$, et sa norme vaut $\sqrt{2}$.

Pour une direction non normalisée u, utiliser $\langle x, u \rangle u / \|u\|^2$: oublier le dénominateur produit généralement une réponse fausse.

Toujours contrôler que le projeté appartient au sous-espace et que le résidu lui est orthogonal.

Une projection se reconnaît à deux conditions

Définition – Orthogonal d'un sous-espace

L'orthogonal de F est l'ensemble $F^\perp = \{x : \forall y \in F,\ \langle x, y \rangle = 0\}$. Pour vérifier $x \in F^\perp$, il suffit de tester les vecteurs d'une base de F, grâce à la linéarité du produit scalaire.

Propriété – Pythagore et orthogonalité

Pour deux vecteurs d'un espace euclidien,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

Ainsi l'égalité de Pythagore $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ équivaut à $u \perp v$. Elle ne peut être utilisée pour une décomposition arbitraire : le terme croisé ne disparaît que si l'orthogonalité est établie.

Méthode – Projeter sur plusieurs directions

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F, calculer chaque coefficient $\langle x, e_i \rangle$ puis additionner les composantes. Si la base est seulement orthogonale, diviser chaque coefficient par $\|e_i\|^2$. Si elle n'est pas orthogonale, cette formule séparée n'est plus valable : il faut d'abord orthonormaliser ou résoudre les équations d'orthogonalité du résidu.

Exemple résolu – 1. Projeter sur une droite non normalisée

Projetons $x = (3, 1)$ sur $F = \mathrm{Vect}(u)$ avec $u = (1, 2)$.

1. Calculer $\langle x, u \rangle = 5$ et $\|u\|^2 = 5$. Le coefficient du projeté est leur quotient, donc $p_F(x) = u = (1, 2)$.
2. Former le résidu $r = x - p_F(x) = (2, -1)$. Le contrôle $\langle r, u \rangle = 2 - 2 = 0$ certifie l'orthogonalité.
3. La distance minimale de x à F vaut $\|r\| = \sqrt{5}$. Pour tout $v \in F$, Pythagore donne $\|x - v\|^2 = 5 + \|p_F(x) - v\|^2 \geq 5$.

L'égalité n'a lieu que pour $v = p_F(x)$: le point le plus proche est unique.

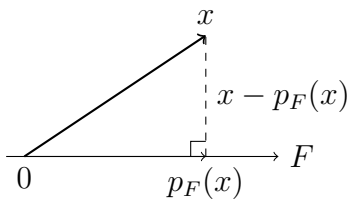
Exemple résolu – 2. Orthonormaliser deux vecteurs

Partons de $u = (1, 1)$ et $v = (1, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Normaliser u : $e_1 = (1, 1)/\sqrt{2}$. Le coefficient de v sur cette direction est $\langle v, e_1 \rangle = 1/\sqrt{2}$.
2. Retirer la projection : $w = v - \langle v, e_1 \rangle e_1 = (1/2, -1/2)$. Son produit scalaire avec e_1 est nul.
3. Comme $\|w\| = 1/\sqrt{2}$, normaliser donne $e_2 = (1, -1)/\sqrt{2}$. Les deux vecteurs ont norme un et sont orthogonaux : ils forment une base orthonormée.

Le résidu est non nul car la famille initiale était libre.

Le triangle de la projection



Le triangle est rectangle au projeté. Pour un autre point de F, le carré de la distance à x ajoute une longueur horizontale au carré de la hauteur ; cette hauteur est donc la distance minimale.

À retenir – Bilan

Ne pas confondre une base orthogonale et une base orthonormée. Pour une projection, vérifier appartenance au sous-espace et orthogonalité du résidu. Le dénominateur $\|u\|^2$ disparaît seulement si la direction a été normalisée ; conserver ce contrôle évite une erreur fréquente.